MATHEMATICAL SCIENCES LIBRARY
3 1761 05550801 4

QUELQUES APPLICATIONS

D'UNE FORMULE SOMMATOIRE GÉNÉRALE

PAR

ERNST LINDELÖF

UNIVERSITY OF TORONTO
DEPT. OF MATHEMATICS
LIBRARY

1902

QA
331
.7
L56
1902
c.1
MATH

Presented
by
Prof. K.O. May
1974

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXXI. № 3.

QUELQUES APPLICATIONS D'UNE FORMULE SOMMATOIRE GÉNÉRALE

PAR

ERNST LINDELÖF.

(PRÉSENTÉ LE 17 MARS 1902).

HELSINGFORS
IMPRIMERIE DE LA SOCIÉTÉ DE LITTÉRATURE FINNOISE
1902.

UNIVERSITY OF TORONTO
DEPT. OF MATHEMATICS
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/quelquesapplicat00lind

FORMULES GÉNÉRALES.

1. Étant donnée une fonction analytique $f(z)$ de la variable complexe $z = \tau + it$, nous allons considérer d'abord la somme finie

$$\sum_1^n f(\nu) \equiv f(1) + f(2) + \cdots + f(n),$$

en supposant la fonction $f(z)$ holomorphe dans une aire T comprenant le segment $1 - n$ de l'axe réel.

Tout point d'affixe entier, étant un zéro du premier ordre pour la fonction $\sin \pi z$, sera pour l'expression $\frac{d}{dz} \log \sin \pi z = \pi \operatorname{cotg} \pi z$ un pôle du premier ordre au résidu 1. Les termes de la somme ci-dessus sont donc respectivement égaux aux résidus de la fonction

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z \cdot f(z) \tag{1}$$

aux points $1, 2, \cdots, n$, et par suite, en prenant à l'intérieur du domaine T un contour fermé C enveloppant ces points $1, 2, \cdots, n$, mais laissant en dehors tout autre point dont l'affixe est un nombre entier, on aura, d'après le théorème de Cauchy,

$$\sum_1^n f(\nu) = \frac{1}{2i} \int_C f(z) \operatorname{cotg} \pi z \, dz, \tag{2}$$

l'intégrale étant prise le long du contour C dans le sens direct.

Pour transformer cette expression, nous laisserons nous guider par cette remarque bien simple, qu'en faisant tendre z vers l'infini suivant une droite quelconque qui n'est pas parallèle à l'axe réel, la fonction

$$\frac{1}{i} \operatorname{cotg} \pi z \equiv \frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}$$

tendra vers -1 ou vers $+1$, suivant que le coefficient t de la partie imaginaire de z tendra vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Ceci nous conduit à poser, dans l'intégrale ci-dessus,

$$\frac{1}{i}\cot g\,\pi z = -1 - \frac{2}{e^{-2\pi i z}-1} \qquad \text{pour } t>0, \tag{3}$$

et

$$\frac{1}{i}\cot g\,\pi z = \quad 1 + \frac{2}{e^{2\pi i z}-1} \qquad \text{pour } t<0. \tag{4}$$

Choisissons désormais le contour C symétrique par rapport à l'axe réel, et désignons par $\alpha\gamma'\beta$ la moitié supérieure et par $\alpha\gamma''\beta$ la moitié inférieure de ce contour, α et β étant ses points d'intersection avec l'axe réel, compris respectivement entre 0 et 1, et entre n et $n+1$.

Cela posé, en effectuant la substitution indiquée ci-dessus, le second membre de l'égalité (2) devient

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha\gamma''\beta} f(z)\,dz - \frac{1}{2}\int_{\beta\gamma'\alpha} f(z)\,dz + \int_{\alpha\gamma''\beta}\frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}\,dz - \int_{\beta\gamma'\alpha}\frac{f(z)}{e^{-2\pi i z}-1}\,dz. \tag{5}$$

Mais ici une première réduction se présente de suite. En effet, comme la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du contour C, on aura

$$\begin{aligned} \int_{\alpha\gamma''\beta} f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta f(\tau)\,d\tau, \\ -\int_{\beta\gamma'\alpha} f(z)\,dz &= \int_{\alpha\gamma'\beta} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

La somme des deux premiers termes de l'expression (5) se réduit donc à $\int_\alpha^\beta f(\tau)\,d\tau$, et par suite l'égalité (2) peut s'écrire:

$$\sum_1^n f(\nu) = \int_\alpha^\beta f(\tau)\,d\tau + \int_{\alpha\gamma'\beta}\frac{f(z)}{e^{-2\pi i z}-1}\,dz + \int_{\alpha\gamma''\beta}\frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}\,dz. \tag{7}$$

D'autre part, comme les chemins $\alpha\gamma'\beta$ et $\alpha\gamma''\beta$ sont symétriques par rapport à l'axe réel, on peut mettre la somme des deux derniers termes de cette expression sous la forme

$$\int_{\alpha\gamma'\beta}\left\{\frac{f(\tau+it)}{e^{2\pi t-2\pi i\tau}-1}(d\tau+i\,dt) + \frac{f(\tau-it)}{e^{2\pi t+2\pi i\tau}-1}(d\tau-i\,dt)\right\}.$$

Posons

$$(8)\qquad \begin{cases} f(\tau+it)=p(\tau,t)+iq(\tau,t), \\ f(\tau-it)=p(\tau,t)-iq(\tau,t), \end{cases}$$

d'où il suit inversement

$$(9)\qquad \begin{cases} p(\tau,t)=\frac{1}{2}\left[f(\tau+it)+f(\tau-it)\right], \\ q(\tau,t)=\frac{1}{2i}\left[f(\tau+it)-f(\tau-it)\right]. \end{cases}$$

Après des réductions faciles, nous arrivons finalement à la formule:

$$(10)\qquad \sum_1^n f(\nu)=\int_\alpha^\beta f(\tau)\,d\tau+2\int_{\alpha\gamma'\beta}\left[P(\tau,t)\,d\tau-Q(\tau,t)\,dt\right],$$

où P et Q désignent les expressions

$$(11)\qquad \begin{cases} P(\tau,t)=\dfrac{p(\tau,t)\left(e^{2\pi t}\cos 2\pi\tau-1\right)-q(\tau,t)\,e^{2\pi t}\sin 2\pi\tau}{e^{4\pi t}-2e^{2\pi t}\cos 2\pi\tau+1}, \\ Q(\tau,t)=\dfrac{q(\tau,t)\left(e^{2\pi t}\cos 2\pi\tau-1\right)+p(\tau,t)\,e^{2\pi t}\sin 2\pi\tau}{e^{4\pi t}-2e^{2\pi t}\cos 2\pi\tau+1}. \end{cases}$$

Lorsque τ est égal à ν ou à $\nu+\frac{1}{2}$, ν étant un entier, ces expressions se réduisent aux suivantes:

$$(12)\qquad \begin{cases} P(\nu,t)=\dfrac{p(\nu,t)}{e^{2\pi t}-1}, \\ Q(\nu,t)=\dfrac{q(\nu,t)}{e^{2\pi t}-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} P\left(\nu+\frac{1}{2},t\right)=-\dfrac{p\left(\nu+\frac{1}{2},t\right)}{e^{2\pi t}+1}, \\ Q\left(\nu+\frac{1}{2},t\right)=-\dfrac{q\left(\nu+\frac{1}{2},t\right)}{e^{2\pi t}+1}. \end{cases}$$

2. La forme qu'il convient de donner au contour C dépend de l'application qu'on vise. Pour celles que nous avons en vue, il sera commode de choisir pour ce contour un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées (et toujours symétrique par rapport à l'axe réel). Pour abréger, nous désignerons ce rectangle par $R_{\alpha,\beta}$, α et β ayant la même signification que ci-dessus.

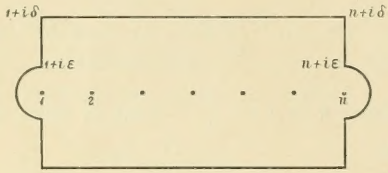
Le contour d'intégration ainsi choisi, la formule (10) devient:

$$(13)\qquad \sum_1^n f(\nu)=\int_\alpha^\beta f(\tau)\,d\tau+2\int_0^\delta\left[Q(\beta,t)-Q(\alpha,t)\right]dt+2\int_\alpha^\beta P(\tau,\delta)\,d\tau,$$

δ désignant la demi-hauteur du rectangle $R_{\alpha,\beta}$.

Cette formule suppose essentiellement que les nombres α et β sont compris entre les limites $0 < \alpha < 1$, $n < \beta < n+1$. Si une de ces limites est atteinte, le rectangle $R_{\alpha,\beta}$, passant par un point singulier de la fonction (1), ne saurait servir de contour d'intégration dans l'égalité (2), à moins qu'on ne fasse subir à son périmètre une déformation, de manière à éviter le point en question. Nous effectuerons cette déformation en effaçant de part et d'autre du point singulier un petit segment du côté de $R_{\alpha,\beta}$ qui y passe, puis en reliant les extrémités du contour resté ouvert par un demi-cercle, ayant le point singulier pour centre et tourné de façon que ce point soit intérieur ou extérieur au contour fermé, suivant qu'il figure ou non parmi les points $1, 2, \cdots, n$.

Pour fixer les idées, supposons p. ex. $\alpha = 1$, $\beta = n$. Dans ce cas, nous remplacerons la partie du contour $R_{1,n}$ qui est voisine du point 1, par un petit demi-cercle tournant la convexité vers la gauche, et la partie voisine du point n par un demi-cercle tournant la convexité vers la droite, comme l'indique la figure ci-dessous.



Revenons maintenant à la formule (2), en prenant comme contour d'intégration C celui que nous venons de dessiner, et cherchons vers quelle limite tend l'intégrale du second membre lorsqu'on fait tendre le rayon ε des demi-cercles vers zéro. A cet effet, nous allons considérer séparément les diverses parties dont se compose cette intégrale.

On voit d'abord que la partie relative au demi-cercle gauche tendra vers la moitié du résidu de la fonction (1) au point $z = 1$, c'est à dire vers $\frac{1}{2} f(1)$.

De même, l'intégrale le long du second demi-cercle tendra vers le demi-résidu $\frac{1}{2} f(n)$.

Pour le reste du contour, nous nous servirons des égalités (3) et (4). Les parties constantes des expressions figurant aux seconds membres de ces égalités donnent naissance aux termes

$$\frac{1}{2}\int_1^n f(\tau+i\varepsilon)\,d\tau \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\int_1^n f(\tau-i\varepsilon)\,d\tau\,,$$

dont la somme tend vers $\int_1^n f(\tau)\,d\tau$, lorsque ε tend vers zéro.

Enfin les secondes parties de ces mêmes expressions, par un calcul analogue à celui qui nous a conduit à la formule (13), et en tenant compte des égalités (12), nous donnent la somme

$$2\int_1^n P(\tau,\delta)\,d\tau + 2\int_\varepsilon^\delta \left[q(n,t)-q(1,t)\right]\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

D'après (9) on a identiquement

$$q(\tau,0)=0.$$

L'expression sous le dernier signe intégral demeure donc parfaitement continue pour $t=0$, et par suite, pour avoir la valeur vers laquelle tend cette intégrale lorsque ε tend vers 0, on n'aura qu'à égaler sa limite inférieure à zéro.

Somme toute, en choisissant le contour d'intégration comme il a été dit, et en faisant tendre ε vers zéro, on tire de (2) cette nouvelle formule:

$$(14)\quad \sum_1^n f(\nu)=\frac{1}{2}\left[f(1)+f(n)\right]+\int_1^n f(\tau)\,d\tau+2\int_0^\delta\left[q(n,t)-q(1,t)\right]\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}+2\int_1^n P(\tau,\delta)\,d\tau,$$

laquelle s'applique dès que la fonction $f(z)$ est holomorphe pour $1\leq\tau\leq n$, $-\delta\leq t\leq\delta$.

3. Supposons maintenant que la fonction donnée $f(z)$ soit holomorphe pour tout point de la bande parallèle à l'axe imaginaire, définie par l'inégalité $1\leq\tau\leq n$, (t quelconque), et admettons en outre que la condition

$$(A)\qquad \lim_{t=\pm\infty} e^{-2\pi|t|}\,|f(\tau+it)|=0$$

est vérifiée *uniformément* pour les mêmes valeurs de τ.

Dans ces conditions, la formule (14) restera valable quelque grand que soit δ, et lorsque δ tend vers l'infini, le dernier terme de son second membre tendra vers zéro, comme le montrent les égalités (9) et (11). L'avant-dernier terme tendra donc vers une limite finie et déterminée, et par suite on obtiendra la formule suivante:

$$(\mathrm{I})\qquad \sum_1^n f(\nu)=\frac{1}{2}\left[f(1)+f(n)\right]+\int_1^n f(\tau)\,d\tau+2\int_0^\infty\left[q(n,t)-q(1,t)\right]\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Remarquons de suite que cette formule reste encore valable si, les autres conditions étant vérifiées, la fonction $f(z)$ *prend une valeur finie et déterminée au point*

$z=1$, *sans y être holomorphe.* Pour s'en assurer, on n'aura qu'à recommencer la démonstration qui précède, avec cette modification qu'on retourne, dans la figure ci-dessus, le demi-cercle gauche de manière à laisser le point $z=1$ en dehors du contour d'intégration. — Une remarque analogue s'applique évidemment au point $x=n$.

Si les conditions énoncées ci-dessus sont vérifiées pour $\alpha \leq \tau \leq \beta$, on peut de même faire tendre δ vers l'infini dans l'égalité (13), et on obtient ainsi la formule

$$\text{(II)} \qquad \sum_1^n f(\nu) = \int_\alpha^\beta f(\tau)\,d\tau + 2\int_0^\infty \left[Q(\beta, t) - Q(\alpha, t)\right] dt.$$

En modifiant ou en combinant entre elles les deux dernières formules, on peut en déduire plusieurs autres. Parmi ces formules, nous citerons les suivantes, dont nous aurons à faire usage plus loin, et qui sont valables sous certaines conditions qui résultent clairement de ce qui précède, sans qu'il soit nécessaire d'y insister davantage:

$$\text{(III)} \quad \sum_1^n f(\nu) = \frac{1}{2}\left[f(n) - f(0)\right] + \int_0^n f(\tau)\,d\tau + 2\int_0^\infty \left[q(n, t) - q(0, t)\right] \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

$$\text{(IV)} \quad \sum_1^n f(\nu) = -\frac{1}{2}\left[f(n+1) + f(0)\right] + \int_0^{n+1} f(\tau)\,d\tau + 2\int_0^\infty \left[q(n+1, t) - q(0, t)\right] \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

$$\text{(V)} \quad \sum_1^n f(\nu) = -\frac{1}{2} f(0) + \int_0^\beta f(\tau)\,d\tau - 2\int_0^\infty q(0, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} + 2\int_0^\infty Q(\beta, t)\,dt \qquad (n < \beta < n+1).$$

$$\text{(VI)} \quad \sum_1^n f(\nu) = \frac{1}{2} f(1) + \int_1^{n+\frac{1}{2}} f(\tau)\,d\tau - 2\int_0^\infty q(1, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} - 2\int_0^\infty q\left(n + \frac{1}{2}, t\right) \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1}.$$

$$\text{(VII)} \quad \sum_1^n f(\nu) = -\frac{1}{2} f(0) + \int_0^{n+\frac{1}{2}} f(\tau)\,d\tau - 2\int_0^\infty q(0, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} - 2\int_0^\infty q\left(n + \frac{1}{2}, t\right) \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1}.$$

4. En serrant davantage les hypothèses, supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit holomorphe dans tout le demi-plan $\tau \geq 1$, que la condition (A) soit vérifiée uniformément pour $1 \leq \tau \leq n$, quelque grand que soit n, et qu'on ait enfin

$$(B) \qquad \lim_{\tau=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|t|}\,|f(\tau + it)|\,dt = 0.$$

Dans ces conditions, les formules (I) et (VI) ci-dessus subsistent quelque grand que soit l'entier n, et lorsque n tend vers l'infini, la seconde de ces formules nous donne

$$\text{(I)}' \qquad \sum_1^{\tau} f(\nu) = \frac{1}{2} f(1) + \int_1^{\tau} f(\tau)\, d\tau - 2\int_0^{\tau} q(1, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1},$$

si la série du premier membre est convergente, et, si cette série diverge,

$$\text{(I a)}' \qquad \lim_{m=\infty} \left\{ \sum_1^{m} f(\nu) - \int_1^{m+\frac{1}{2}} f(\tau)\, d\tau \right\} = \frac{1}{2} f(1) - 2\int_0^{\tau} q(1, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

On trouve de même, sous des hypothèses analogues à celles qu'on vient d'énoncer,

$$\text{(II)}' \qquad \sum_1^{\tau} f(\nu) = \int_{\alpha}^{\tau} f(\tau)\, d\tau - 2\int_0^{\tau} Q(\alpha, t)\, dt, \qquad (0 < \alpha < 1),$$

$$\text{(III)}' \qquad \sum_1^{\tau} f(\nu) = \frac{1}{2} f(0) + \int_0^{\tau} f(\tau)\, d\tau - 2\int_0^{\tau} q(0, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

formules qui s'appliquent lorsque la série $\sum_1^{\infty} f(\nu)$ converge; en cas de divergence de cette série, elles seront remplacées par des formules analogues à (I a)'.

Enfin, en retranchant l'égalité (I) des égalités (I)' ou (I a)', nous obtenons

$$\text{(I)}'' \qquad \sum_1^{\tau} f(\nu) = \sum_1^{n-1} f(\nu) + \frac{1}{2} f(n) + \int_n^{\tau} f(\tau)\, d\tau - 2\int_0^{\tau} q(n, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

ou

$$\text{(I a)}'' \quad \lim_{m=\infty} \left\{ \sum_1^{m} f(\nu) - \int_1^{m+\frac{1}{2}} f(\tau)\, d\tau \right\} = \sum_1^{n-1} f(\nu) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^{n} f(\tau)\, d\tau - 2\int_0^{\tau} q(n, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

suivant que la série $\sum_1^{\infty} f(\nu)$ est convergente ou non, et de même, en retranchant (II) de (II)', et en admettant que la série en question converge,

$$\text{(II)}'' \qquad \sum_1^{\tau} f(\nu) = \sum_1^{n} f(\nu) + \int_{\beta}^{\tau} f(\tau)\, d\tau - 2\int_0^{\tau} Q(\beta, t)\, dt \qquad (n < \beta < n + 1).$$

Dans ces dernières formules, l'entier n peut être pris arbitrairement grand. Il est d'ailleurs évident que, pour une valeur donnée de n, ces formules subsistent dès que les quantités $f(1), f(2), \cdots, f(n)$ sont finies et que les conditions énoncées au début de ce numéro sont vérifiées, pour les formules (I)'' et (I a)'' dans le demi-plan $\tau > n$, et pour la formule (II)'' dans le demi-plan $\tau > \beta$.

5. Jusqu'à présent nous avons constamment supposé la fonction $f(z)$ holomorphe pour tout point de la région dont le contour nous a servi comme contour

d'intégration. Mais il est facile de voir comment se modifient les formules qui précèdent, dans les cas où la fonction $f(z)$, tout en restant uniforme, présente à l'intérieur de la région considérée un nombre *limité* de points singuliers.

Supposons cette dernière condition, ainsi que la condition (A), vérifiées p. ex. dans la bande $\alpha \leq \tau \leq \beta$ $(0 < \alpha < 1,\ n < \beta < n+1)$, et, afin d'énoncer notre résultat sous une forme bien nette, admettons en outre qu'aucun des points singuliers de $f(z)$ compris dans cette bande n'est situé sur l'axe réel.

Reprenons alors les considérations du n° 1, en choisissant comme contour d'intégration C un rectangle $R_{n,\eta}$, dont on aura pris la hauteur assez grande pour qu'il renferme tous les points singuliers de $f(z)$ intérieurs à la bande envisagée. Dans l'hypothèse actuelle, l'application du théorème des résidus nous donnera, au lieu de (2), la formule

$$\sum_1^n f(r) - \frac{1}{2i}\int_{R_{n,\eta}} f(z)\cot g\,\pi z\,dz = S,$$

S désignant la somme des résidus de la fonction $\pi \cot g\,\pi z \cdot f(z)$ relatifs aux points singuliers de $f(z)$ compris dans la bande $\alpha < \tau < \beta$.

L'intégrale figurant au second membre de cette formule pourra encore se mettre sous la forme (5), mais le raisonnement qui suit doit être modifié. En effet, on trouve maintenant, au lieu de (6), les égalités suivantes:

$$\int_{\alpha\gamma'\beta} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\tau)\,d\tau - 2\pi i S',$$

$$\int_{\alpha\gamma''\beta} f(z)\,dz = -\int_\alpha^\beta f(\tau)\,d\tau + 2\pi i S''.$$

S' et S'' désignant les sommes des résidus de la fonction $f(z)$ relatifs aux points singuliers de cette fonction compris respectivement dans les moitiés supérieure et inférieure de la bande envisagée.

Les autres raisonnements n'éprouveront aucun changement, et nous arrivons donc finalement à ce résultat que la formule (II), dans l'hypothèse actuelle, doit être remplacée par la suivante:

$$\sum_1^n f(r) - \int_\alpha^\beta f(\tau)\,d\tau - 2\int_0^\alpha \left[Q(\beta, t) - Q(\alpha, t)\right] dt = \left\{S + \pi i (S' - S'')\right\},$$

S, S', S'' ayant la signification indiquée ci-dessus.

Les autres formules que nous avons établies plus haut subiront des modifications analogues.

Après que nous avions à peu près terminé nos recherches, autant que nous l'a permis le peu de temps dont nous avons disposé pour la composition du présent Mémoire, et que nous avions rédigé les pages qu'on vient de lire, nous nous sommes aperçu que quelques-unes des formules que nous venons d'établir ont été connues, et même depuis longtemps, par les géomètres.

Des cas particuliers de ces formules ont été signalés déjà par POISSON [1]), dans un Mémoire remarquable daté de 1813.

D'autre part la formule (I)′ p. 7 a été donnée, sous une forme légèrement modifiée, en 1823 par ABEL [2]), qui y arrive même par deux voies différentes, mais en laissant de côté la question de la convergence. — Il semble d'ailleurs que PLANA aurait découvert cette formule trois ans avant ABEL, par un calcul également formel [6]).

On conçoit d'ailleurs que CAUCHY [3]), dans ses recherches sur les intégrales définies et dans ses applications de la théorie des résidus, a dû nécessairement rencontrer des formules du genre de celles qui nous occupent ici.

Citons encore un Mémoire de SCHLÖMILCH [4]) de l'année 1848, où se trouvent développés des résultats qui rentrent comme cas particuliers dans nos formules générales.

Cependant, il semble que la formule d'ABEL soit restée à peu près inaperçue, ou tout au moins sans application, jusqu'en 1889, date à laquelle KRONECKER, à la suite de ses recherches sur les formules sommatoires [5]), s'en est occupé et en a donné pour la première fois une démonstration rigoureuse. Son Mémoire [6]), d'un style très condensé et d'une notation assez compliquée, ne contient que peu d'applications et ne paraît pas avoir attiré sur la formule en question toute l'attention qu'elle mérite.

---

[1]) *Second Mémoire sur la distribution de l'Électricité à la surface des corps conducteurs* (*Mémoires de l'Institut de France,* Année 1811, II).

[2]) *Oeuvres complètes* (rédigées par HOLMBOE) t. II: n:o VII: *L'intégrale finie* $\sum^{n} \varphi(x)$ *exprimée par une intégrale définie simple*, n:o XVIII: *Résolution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies.*

[3]) *Voir* par exemple son *Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques* (*Mémoires de l'Institut de France*, Année 1823), ainsi que la Note des *Exercices de Mathématiques* (Année 1827) intitulée: *Usage du calcul des résidus pour la sommation ou la transformation des séries* (*Oeuvres complètes,* 2e série, t. VII, p. 345).

[4]) *Développement de deux formules sommatoires* (*Journal de Crelle,* t. 42 pp. 125–130).

[5]) *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* 1885, II, pp. 841—862, et 1889, II, pp. 867—881.

[6]) *Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale* (*Journal de Crelle*, t. 105, pp. 345—354). Ce Mémoire contient quelques notices bibliographiques intéressantes, auxquelles nous renvoyons le lecteur.

Dernièrement M. J. PETERSEN[1]) a démontré de nouveau la formule d'ABEL, à ce qu'il semble sans connaître le Mémoire de KRONECKER, et en a donné quelques applications intéressantes, auxquelles de notre côté nous avions été conduit également.

Si, malgré tous ces travaux, nous publions ici nos recherches, c'est d'abord parce que nous osons croire que notre exposition est à la fois plus simple et plus complète que celle des auteurs cités, mais surtout parce qu'il nous semble qu'on ne s'est pas rendu compte de tout le parti qu'on peut tirer des formules en question pour la théorie des fonctions et notamment pour le prolongement analytique. Nous osons espérer que cette opinion sera justifiée par les développements qui suivent, bien que le temps nous ait fait défaut pour épuiser, même approximativement, notre sujet.

Nous ferons d'abord voir que nos formules entraînent comme conséquence immédiate les propriétés si intéressantes des polynômes de BERNOULLI.

Nous en ferons ensuite l'application aux formules sommatoires et en particulier à la formule d'EULER, et nous obtiendrons pour le terme-reste de cette dernière formule une nouvelle expression qui est, dans certains cas, plus avantageuse que celles données par POISSON et JACOBI. — Cette application a été indiquée en passant par M. PETERSEN, mais nous pensons que l'importance en justifie une discussion plus complète.

La troisième application, qui nous semble particulièrement intéressante, est relative au prolongement analytique des séries de TAYLOR.

Dans la dernière partie de ce travail, nous appliquerons nos formules à la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN, dont les propriétés s'en déduisent avec une grande facilité. Nous terminons par l'exposition d'une méthode très simple pour le calcul des zéros de cette fonction, méthode qui conduit sans trop de travail à des résultats numériques assez exacts.

[1]) *Vorlesungen über Funktionstheorie*, (Copenhague 1898).

LES POLYNÔMES DE BERNOULLI.

6. Comme première application des formules générales que nous venons d'établir, cherchons à calculer la valeur de la somme

$$\varphi_\mu(n) = 1^{\mu-1} + 2^{\mu-1} + \cdots + (n-1)^{\mu-1},$$

n et μ désignant des entiers positifs quelconques supérieurs à l'unité.

Suivant la notation adoptée plus haut, nous devons poser:

$$f(z) = z^{\mu-1}, \quad z = \tau + it,$$

$$f(\tau + it) = (\tau + it)^{\mu-1} = p(\tau, t) + iq(\tau, t),$$

d'où il suit, en usant de la notation habituelle

$$C_n^{(\nu)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots\nu},$$

pour $\mu = 2k$,

$$\begin{cases} p(\tau, t) = \tau^{2k-1} - C_{2k-1}^{(2)}\tau^{2k-3}t^2 + C_{2k-1}^{(4)}\tau^{2k-5}t^4 - \cdots + (-1)^{k-1}C_{2k-1}^{(2k-2)}\tau t^{2k-2}, \\ q(\tau, t) = C_{2k-1}^{(1)}\tau^{2k-2}t - C_{2k-1}^{(3)}\tau^{2k-4}t^3 + \cdots + (-1)^{k-1}t^{2k-1}, \end{cases}$$

et pour $\mu = 2k+1$,

$$\begin{cases} p(\tau, t) = \tau^{2k} - C_{2k}^{(2)}\tau^{2k-2}t^2 + C_{2k}^{(4)}\tau^{2k-4}t^4 - \cdots + (-1)^k t^{2k}, \\ q(\tau, t) = C_{2k}^{(1)}\tau^{2k-1}t - C_{2k}^{(3)}\tau^{2k-3}t^3 + \cdots + (-1)^{k-1}C_{2k}^{(2k-1)}\tau t^{2k-1}. \end{cases}$$

Cela posé, appliquons d'abord à notre fonction $z^{\mu-1}$ la formule (IV) du n° 3 en y remplaçant n par $n-1$, ce qui nous donne l'égalité

$$\varphi_\mu(n) = \frac{n^\mu}{\mu} - \frac{1}{2}n^{\mu-1} + 2\int_0^\infty \left[q(\mu, t) - q(0, t)\right]\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Multiplions par μ et faisons $\mu = 2k$; il vient

$$4k\left[q(n,t) - q(0,t)\right] = 4k\left\{C_{2k-1}^{(1)} n^{2k-2} t + C_{2k-1}^{(3)} n^{2k-4} t^3 + \cdots + (-1)^k C_{2k-1}^{(2k-3)} n^2 t^{2k-3}\right\}$$

$$4\left\{C_{2k}^{(2)} n^{2k-2} t - 2\, C_{2k}^{(4)} n^{2k-4} t^3 + \cdots + (-1)^k (k-1)\, C_{2k}^{2k-2)} n^2 t^{2k-3}\right\},$$

et par suite, en posant

$$B_\nu = 4\nu \int_0^\infty t^{2\nu-1} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{2(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots), \tag{15}$$

nous trouvons l'égalité

$$2k\, q_{2k}(n) = n^{2k} - kn^{2k-1} + C_{2k}^{(2)} B_1 n^{2k-2} - C_{2k}^{(4)} B_2 n^{2k-4} + \cdots + (-1)^k C_{2k}^{(2k-2)} B_{k-1} n^2.$$

Pour $\mu = 2k+1$, un calcul tout analogue nous donne

$$(2k+1)\, q_{2k+1}(n) = n^{2k+1} - \left(k + \frac{1}{2}\right) n^{2k} + C_{2k+1}^{(2)} B_1 n^{2k-1} - C_{2k+1}^{(4)} B_2 n^{2k-3} + \cdots$$
$$+ (-1)^{k+1} C_{2k+1}^{(2k)} B_k n.$$

Nous arrivons donc à ce résultat, qu'en posant

$$\begin{aligned} P_{2k}(x) &= x^{2k} - kx^{2k-1} + C_{2k}^{(2)} B_1 x^{2k-2} - C_{2k}^{(4)} B_2 x^{2k-4} + \cdots + (-1)^k C_{2k}^{(2k-2)} B_{k-1} x^2, \\ P_{2k+1}(x) &= x^{2k+1} - \left(k + \frac{1}{2}\right) x^{2k} + C_{2k+1}^{(2)} B_1 x^{2k-1} - C_{2k+1}^{(4)} B_2 x^{2k-3} + \cdots \\ &\qquad + (-1)^{k+1} C_{2k+1}^{(2k)} B_k x, \end{aligned} \tag{16}$$

on aura, pour tout entier n supérieur à l'unité,

$$P_\mu(n) = \mu\, q_\mu(n) = \mu\left\{1^{\mu-1} + 2^{\mu-1} + \cdots + (n-1)^{\mu-1}\right\} \qquad (\mu = 2, 3, \cdots). \tag{17}$$

Il est d'ailleurs évident que cette propriété détermine complètement les polynômes $P_\mu(x)$.

Les polynômes (16) s'appellent *polynômes de* BERNOULLI, et les nombres B_1, $B_2, \cdots$ définis par l'égalité (15) sont les *nombres de* BERNOULLI.

Les expressions (16) mettent en évidence deux propriétés importantes des polynômes de BERNOULLI. On trouve d'abord, en faisant $x = 0$,

$$P_{2k}(0) = 0, \qquad P_{2k+1}(0) = 0, \tag{18}$$

et ensuite, en différentiant,

$$\begin{cases} P'_{2k}(x) = 2k\, P_{2k-1}(x), \\ P'_{2k+1}(x) = (2k+1)\left\{P_{2k}(x) + (-1)^{k+1} B_k\right\}. \end{cases} \tag{19}$$

D'autre part, d'après (17), les égalités

$$P_\mu(n) - P_\mu(n-1) = \mu(n-1)^{\mu-1} \qquad (\mu = 2, 3, \cdots)$$

sont vérifiées pour tout nombre entier n supérieur à l'unité, d'où il suit qu'on aura identiquement

$$P_\mu(x) - P_\mu(x-1) = \mu(x-1)^{\mu-1}. \tag{20}$$

Pour $x = 1$, on en conclut, en tenant compte des valeurs (18),

$$P_{2k}(1) = 0, \qquad P_{2k+1}(1) = 0, \tag{21}$$

relations qui permettent de calculer par récurrence les nombres de Bernoulli et qui font voir que ce sont des nombres rationnels. La seconde de ces relations:

$$P_{2k+1}(1) = \frac{1}{2} - k + C_{2k+1}^{(2)} B_1 - C_{2k+1}^{(4)} B_2 + \cdots + (-1)^{k+1} C_{2k+1}^{(2k)} B_k = 0,$$

est celle donnée par Moivre.

A l'aide de la relation (20) et des égalités

$$P_{2k}(x) - P_{2k}(-x) = -2kx^{2k-1},$$

$$P_{2k+1}(x) + P_{2k+1}(-x) = -(2k+1)x^{2k},$$

qui se déduisent immédiatement des expressions (16), on trouve les nouvelles relations

$$P_{2k}(1-x) = P_{2k}(x); \qquad P_{2k+1}(1-x) = -P_{2k+1}(x). \tag{22}$$

On y serait encore conduit en appliquant notre formule (III), après y avoir remplacé n par $n-1$.

Ces relations montrent que le développement de $P_\mu(x)$ suivant les puissances de $x - \frac{1}{2}$ ne contient que des puissances de même parité que μ. Cette nouvelle forme des polynômes de Bernoulli s'obtient immédiatement par l'application de notre formule (VII), qui s'écrit dans le cas actuel, en changeant n en $n-1$,

$$\varphi_\mu(n) = \frac{1}{\mu}\left(n - \frac{1}{2}\right)^\mu - 2\int_0^\infty q(0, t)\frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} - 2\int_0^\infty q\left(n - \frac{1}{2}, t\right)\frac{dt}{e^{2\pi t} + 1}.$$

En posant, pour abréger,

$$B'_\nu = 4\nu\int_0^\infty t^{2\nu-1}\frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} - B_\nu\left(1 - \frac{1}{2^{2\nu-1}}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots), \tag{23}$$

on en conclut, suivant la parité de μ,

$$\begin{cases} P_{2k}(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k} - C_{2k}^{2} B_1'\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} C_{2k}^{2k-2} B_{k-1}'\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \qquad\qquad + (-1)^k (B_k + B_k'), \\ P_{2k+1}(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k+1} - C_{2k+1}^{2} B_1'\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \cdots + (-1)^k C_{2k+1}^{2k} B_k'\left(x - \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, ces formules nous donnent

$$P_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^k 2 B_k\left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right), \qquad P_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Notons enfin les formules

$$\int_0^1 P_{2k}(x)\, dx = (-1)^k B_k,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} P_{2k+1}(x)\, dx = \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} B_{k+1}\left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right),$$

qui sont une conséquence immédiate des relations (18), (19) et (21).

7. Appliquons enfin la formule V du n° 3, en y remplaçant u par $u + 1$, et en posant $\beta = u - n$ $(0 \leqq u < 1)$. Nous trouvons ainsi l'égalité

$$(24) \qquad \mu q_n(n) = (u - n)^n - 2\mu \int_0^\infty q(0, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} + 2\mu \int_0^\infty Q(n - u, t)\, dt,$$

où

$$Q(n - u, t) = \frac{q(n - u, t)(\cos 2\pi u - e^{-2\pi t}) - p(n - u, t) \sin 2\pi u}{e^{2\pi t} + e^{-2\pi t} - 2\cos 2\pi u}.$$

D'après (17), le premier membre de l'égalité (24) peut être remplacé par $P_n(n)$. Comme le second membre est un polynôme en n, et comme l'égalité subsiste pour $n = 2, 3, \cdots$, il s'ensuit qu'on aura identiquement pour toutes les valeurs x

$$P_n(x) = (x - u)^n - 2\mu \int_0^x q(0, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} + 2\mu \int_0^x Q(x - u, t)\, dt.$$

En faisant $x = u$, puis écrivant de nouveau x à la place de u, on en conclut, suivant la parité de μ,

$$(25)\quad \begin{cases} P_{2k}(x) = (-1)^k \left\{ B_k + 4k \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2k-1}(e^{-2\pi t} - \cos 2\pi x)}{e^{2\pi t} + e^{-2\pi t} - 2\cos 2\pi x}\, dt \right\}, \\ P_{2k+1}(x) = (-1)^{k+1}(4k+2)\sin 2\pi x \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2k}\, dt}{e^{2\pi t} + e^{-2\pi t} - 2\cos 2\pi x}. \end{cases}$$

Ce sont les formules données par RAABE [1]).

Si, dans la première de ces formules, on remplace B_k par son expression

$$B_k = 4k \int_0^\infty t^{2k-1} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1},$$

on trouve, après une réduction facile:

$$P_{2k}(x) = (-1)^k\, 8k \sin^2 \pi x \int_0^x \frac{e^{2\pi t} + 1}{e^{2\pi t} - 1} \cdot \frac{t^{2k-1}\, dt}{e^{2\pi t} + e^{-2\pi t} - 2\cos 2\pi x},$$

résultat qui est dû à HERMITE [2]).

Comme l'a fait remarquer HERMITE à l'endroit cité, cette dernière égalité met en évidence la propriété capitale du polynôme $P_{2k}(x)$, de garder dans l'intervalle $0 < x < 1$ un signe invariable, à savoir celui de $(-1)^k$, de même que la seconde formule de RAABE montre que, dans le même intervalle, le polynôme $P_{2k+1}(x)$ ne s'annule que pour $x = \frac{1}{2}$.

En remarquant que les expressions

$$\frac{e^{-2\pi t} - \cos 2\pi x}{e^{2\pi t} + e^{-2\pi t} - 2\cos 2\pi x} \quad \text{et} \quad i \cdot \frac{\sin 2\pi x}{e^{2\pi t} + e^{-2\pi t} - 2\cos 2\pi x}$$

représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du quotient

$$\frac{1}{1 - e^{2\pi t} \cdot e^{2\pi i x}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\pi t}(\cos 2n\pi x - i \sin 2n\pi x),$$

on tire des formules de RAABE les développements suivants des polynômes de BERNOULLI:

$$(26)\quad \begin{cases} P_{2k}(x) = (-1)^k \left\{ B_k - 2(2k)! \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^{2k}} \right\}, \\ P_{2k+1}(x) = (-1)^{k+1} 2(2k+1)! \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{(2n\pi)^{2k+1}}. \end{cases}$$

[1]) *Journal de Crelle*, t. 42 pp. 348—376.
[2]) *Ibid.* t. 79 pp. 339—344.

Ces développements ne sont valables que pour les valeurs réelles de x comprises dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$. Quant aux formules de RAABE, elles ne s'appliquent que dans la bande comprise entre l'axe imaginaire et la parallèle à cet axe passant par le point $x = 1$. Ces droites sont en effet des coupures pour les intégrales figurant aux seconds membres desdites formules.

Désignons respectivement par $P_{2k}(x)$ et $P_{2k-1}(x)$ les fonctions réelles et périodiques de x représentées par les seconds membres des équations (25) ou (26), de sorte qu'on aura pour, $\mu = 2, 3, \cdots$,

$$(27) \qquad \begin{cases} P_\mu(x) = P_\mu(x) & \text{dans l'intervalle } 0 < x < 1, \\ \overline{P}_\mu(x+n) = \overline{P}_\mu(x) & \text{quel que soit l'entier } n. \end{cases}$$

D'après (19), ces fonctions vérifient pour toutes les valeurs de x les égalités

$$(28) \qquad \begin{cases} P'_{2k}(x) = 2k\, P_{2k-1}(x), \\ P'_{2k-1}(x) = (2k+1)\, \overline{P}_{2k}(x) + (-1)^{k+1} B_{k+1}. \end{cases}$$

En faisant $k = 1$ dans la première relation (28), nous définirons une nouvelle fonction $P_1(x) = \frac{1}{2} P'_2(x)$, laquelle, en vertu de l'égalité $P_2(x) = x(x-1)$, jouira des propriétés suivantes:

$$(29) \qquad \begin{cases} P_1(x) = x - \frac{1}{2} & \text{pour } 0 < x < 1, \\ \overline{P}_1(x+n) = \overline{P}_1(x) & \text{quel que soit l'entier } n. \end{cases}$$

En différentiant la première égalité (26) et en faisant $k = 1$, on trouve pour $P_1(x)$ le développement

$$(30) \qquad P_1(x) = -\sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}.$$

Cette fonction sera encore représentée par l'expression que donne la seconde formule (25) pour $k = 0$.

LA FORMULE SOMMATOIRE D'EULER ET LES FORMULES ANALOGUES.

8. Nous montrerons dans la suite de ce travail que les formules générales établies plus haut sont d'une grande importance pour l'étude des propriétés des classes étendues de fonctions analytiques. Mais pour le calcul effectif d'une somme donnée, il est préférable de transformer ces formules, en développant en séries les intégrales définies qui y figurent. Les développements ainsi obtenus seront certainement pour la plupart divergents, mais en revanche ils jouiront, dans bien des cas, de cette propriété curieuse et intéressante, qui pour le calcul est en somme la seule importante, que leurs termes successifs, ainsi que le reste de la série, vont rapidement en décroissant jusqu'à un certain terme, de sorte qu'on pourra souvent atteindre un résultat très précis en ne calculant qu'un petit nombre de termes.

Il s'agit de développer les intégrales suivantes:

$$\int_0^t q(\tau, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}, \quad \int_0^t q(\tau, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1}, \quad \int_0^t Q(\tau, t)\, dt,$$

où

$$Q(\tau, t) = \frac{q(\tau, t)(\cos 2\pi\tau - e^{-2\pi t}) + p(\tau, t) \sin 2\pi\tau}{e^{2\pi t} + e^{-2\pi t} - 2\cos 2\pi\tau}.$$

On y arrive en appliquant la formule de Taylor aux expressions $p(\tau, t)$ et $q(\tau, t)$, considérées comme fonctions de la variable t, ce qui donne:

$$p(\tau, t) = p(\tau, 0) + \frac{dp(\tau, 0)}{dt} t + \cdots + \frac{d^{2k-1} p(\tau, 0)}{dt^{2k-1}} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} + \lambda \frac{d^{2k} p(\tau, \theta t)}{dt^{2k}} \frac{t^{2k}}{(2k)!},$$

$$q(\tau, t) = q(\tau, 0) + \frac{dq(\tau, 0)}{dt} t + \cdots + \frac{d^{2k} q(\tau, 0)}{dt^{2k}} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \lambda' \frac{d^{2k-1} q(\tau, \theta' t)}{dt^{2k-1}} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

θ et θ' désignant des nombres positifs compris entre 0 et 1, et λ, λ' des quantités dont les modules ne dépassent pas l'unité[1]). Or les égalités (9) permettent d'exprimer les dérivées des fonctions p et q à l'aide de celles de la fonction donnée $f(z)$, et en effectuant le calcul, on trouve ainsi que les développements qui précèdent peuvent se mettre sous la forme:

$$p(\tau, t) = f(\tau) - \frac{f''(\tau)}{2!} t^2 + \frac{f^{(4)}(\tau)}{4!} t^4 - \cdots + (-1)^k \frac{f^{(2k-2)}(\tau)}{(2k-2)!} t^{2k-2} + R_k(p),$$

$$q(\tau, t) = f'(\tau) t - \frac{f'''(\tau)}{3!} t^3 + \frac{f^{(5)}(\tau)}{5!} t^5 - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{f^{(2k-1)}(\tau)}{(2k-1)!} t^{2k-1} + R_k(q),$$

avec

$$(31) \quad \begin{cases} R_k(p) = (-1)^k \dfrac{\lambda}{2} \left[f^{(2k)}(\tau + i\theta t) + f^{(2k)}(\tau - i\theta t) \right] \dfrac{t^{2k}}{(2k)!}, \\ R_k(q) = (-1)^k \dfrac{\lambda'}{2} \left[f^{(2k+1)}(\tau + i\theta' t) + f^{(2k+1)}(\tau - i\theta' t) \right] \dfrac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{cases}$$

En substituant l'expression de $q(\tau, t)$ qu'on vient d'écrire dans la première intégrale ci-dessus, et en tenant compte des égalités (15), on obtient le développement

$$(32) \quad 2 \int_0^t q(\tau, t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{B_1}{2} f'(\tau) - \frac{B_2}{4} \frac{f'''(\tau)}{3!} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{2k} \frac{f^{(2k-1)}(\tau)}{(2k-1)!} + R_k,$$

le reste R_k étant égal à

$$R_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^t \lambda' \left[f^{(2k+1)}(\tau + i\theta' t) + f^{(2k+1)}(\tau - i\theta' t) \right] \frac{t^{2k+1}\, dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Supposons en particulier qu'on ait, pour toutes les valeurs réelles de t,

$$(33) \qquad f^{(2k+1)}(\tau + it) < M_{2k+1}(\tau),$$

$M_{2k+1}(\tau)$ désignant une quantité finie positive qui pourra varier avec τ; il vient

$$(34) \qquad R_k < \frac{B_{k+1}}{(2k+2)!} M_{2k+1}(\tau).$$

On trouve de même, en usant de la notation (23), pour la deuxième intégrale considérée ci-dessus le développement

[1]) Voir G. DARBOUX, *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable*. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1876, p. 291.

$$2\int_0^\infty q(\tau, t)\frac{dt}{e^{2\pi t}+1} = \frac{B_1'}{2}f'(\tau) - \frac{B_2'}{4}\frac{f'''(\tau)}{3!} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{B_k'}{2k}\frac{f^{(2k-1)}(\tau)}{(2k-1)!} + R_k,$$

$$R_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_0^\infty \lambda'\left[f^{(2k+1)}(\tau + i\theta' t) + f^{(2k+1)}(\tau - i\theta' t)\right]\frac{t^{2k+1}\,dt}{e^{2\pi t}+1}$$

et enfin pour la troisième intégrale, en se servant des formules de Raabe,

$$2\int_0^\infty Q(\tau, t)\,dt = \frac{B_1}{2}f'(\tau) - \frac{B_2}{4}\frac{f'''(\tau)}{3!} + \frac{B_3}{6}\frac{f^{(5)}(\tau)}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{B_k}{2k}\frac{f^{(2k-1)}(\tau)}{(2k-1)!}$$

$$- P_1(\tau)f'(\tau) + \frac{P_2(\tau)}{2}f''(\tau) - \frac{P_3(\tau)}{3}\frac{f'''(\tau)}{2!} + \cdots + \frac{P_{2k}(\tau)}{2k}\frac{f^{(2k-1)}(\tau)}{(2k-1)!} + R_k,$$

où

$$R_k = 2\int_0^\infty \frac{R_k(q)(\cos 2\pi\tau - e^{-2\pi t}) + R_k(p)\sin 2\pi\tau}{e^{2\pi t} + e^{-2\pi t} - 2\cos 2\pi\tau}\,dt.$$

$R_k(p)$ et $R_k(q)$ désignant les expressions (31).

9. Appliquons les résultats qui précèdent à la formule (1) p. 5, que nous écrirons, en changeant légèrement la notation,

$$(35)\qquad \sum_m^n f(\nu) = \frac{1}{2}\left[f(m) + f(n)\right] + \int_m^n f(\tau)\,d\tau + 2\int_0^\infty \left[q(m, t) - q(n, t)\right]\frac{dt}{e^{2\pi t}-1},$$

m et n étant des entiers quelconques ($m < n$). En se servant de l'égalité (32), on peut mettre cette formule sous la forme suivante

$$(36)\qquad \sum_m^n f(\nu) = \frac{1}{2}\left[f(m) + f(n)\right] + \int_m^n f(\tau)\,d\tau + \sum_{\nu=1}^{k}\left\{(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu}\frac{f^{(2\nu-1)}(n) - f^{(2\nu-1)}(m)}{(2\nu-1)!}\right\} + R_k,$$

où l'on aura, en posant pour abréger $f^{(2k+1)}(n + it) - f^{(2k+1)}(m + it) = \Phi(t)$,

$$(37)\qquad R_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_0^\infty \lambda'\left[\Phi(\theta' t) + \Phi(-\theta' t)\right]\frac{t^{2k+1}\,dt}{e^{2\pi t}-1},$$

λ' et θ' ayant la même signification qu'au numéro précédent.

La formule (36) est la célèbre *formule sommatoire* d'Euler. L'expression (37) du reste est dans certains cas plus maniable que celles données par Poisson et Jacobi, sur lesquelles nous aurons d'ailleurs bientôt l'occasion de revenir.

Dans le cas où l'hypothèse (33) est vérifiée pour $\tau = m$ et pour $\tau = n$, on peut déduire de l'expression (37), à l'aide de l'inégalité (34), pour le module du reste R_k la limite supérieure suivante:

$$R_k < \frac{B_k}{(2k-2)!}\left|M_{2k-1}(m) + M_{2k-1}(n)\right|. \tag{38}$$

Rappelons les conditions dans lesquelles est applicable l'égalité (35), d'où nous avons tiré la formule d'EULER:

La fonction $f(z)$ doit être uniforme et holomorphe en tout point z dont l'abscisse τ est comprise dans l'intervalle $m < \tau < n$; de plus, l'égalité (A) p. 5 doit avoir lieu uniformément pour ces valeurs de τ.

Si la fonction $f(z)$, tout en vérifiant les autres conditions, présente à l'intérieur du domaine considéré un nombre limité de points singuliers, dont aucun n'est situé sur l'axe réel, on doit, d'après n° 5, retrancher du second membre de l'égalité (35) l'expression $S + \pi i(S' - S'')$, S, S', S'' ayant la signification indiquée p. 8. Donc, dans les mêmes conditions, la formule (36) doit être remplacée par la suivante:

$$\sum_{m}^{n} f(\nu) - \frac{1}{2}\left\{f(m) + f(n)\right\} + \int_{m}^{n} f(\tau)\,d\tau - \left\{S + \pi i(S' - S'')\right\}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{k}\left\{(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu}\frac{f^{(2\nu-1)}(n) - f^{(2\nu-1)}(m)}{(2\nu-1)!}\right\} + R_k,$$

le reste R_k étant toujours donné par l'expression (37).

Soit par exemple à calculer la somme

$$\sum_{-n'}^{n''} \frac{1}{n^2 - 2n + 2}.$$

n' et n'', désignant des entiers positifs. On fera dans la formule ci-dessus $m = -n'$, $n = n''$, $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 2} = \frac{1}{(z-1+i)(z-1-i)}$, d'où il suit facilement

$$S + \pi i(S' - S'') = -\frac{2\pi}{e^{2\pi} - 1};$$

si les entiers n' et n'' sont assez grands, cette formule donnera une bonne convergence, comme le montre l'inégalité (38).

10. Il est intéressant de faire voir comment se rattachent les expressions qu'ont données POISSON et JACOBI du terme-reste de la formule d'EULER, aux considérations développées dans la première partie de ce travail.

Reprenons à cet effet la formule (7), en choisissant comme contour d'intégration C un rectangle $R_{m,n}$, modifié dans le sens qu'indique la figure de la page 4, et écrivons

$$\frac{1}{e^{-2\pi iz}-1} = e^{2\pi iz} + e^{4\pi iz} + \cdots + e^{2k\pi iz} + \frac{e^{2k\pi iz}}{e^{-2\pi iz}-1}.$$

$$\frac{1}{e^{2\pi iz}-1} = e^{-2\pi iz} + e^{-4\pi iz} + \cdots + e^{-2k\pi iz} + \frac{e^{-2k\pi iz}}{e^{2\pi iz}-1}.$$

Par un raisonnement tout analogue à celui du n° 2, nous obtiendrons ainsi la formule

$$\sum_m^n f(\nu) = \frac{1}{2}\left[f(m) + f(n)\right] + \int_m^n f(\tau)\,d\tau + 2\sum_{\nu=1}^{k}\int_m^n f(\tau)\cos 2\nu\pi\tau\,d\tau$$

$$+ 2\int_0^1 \left[q(n,t) - q(m,t)\right]\frac{e^{2k\pi t}}{e^{2\pi t}-1}\,dt.$$

En développant la dernière intégrale, on pourrait en tirer une formule sommatoire analogue à la formule d'Euler, mais les coefficients des dérivées ne seraient plus des nombres rationnels.

Lorsque k tend vers l'infini, le dernier terme de la formule ci-dessus tend vers zéro, de sorte qu'on obtient

$$\sum_m^n f(\nu) = \frac{1}{2}\left[f(m) + f(n)\right] + \int_m^n f(\tau)\,d\tau + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_m^n f(\tau)\cos 2\nu\pi\tau\,d\tau. \tag{39}$$

Or on trouve successivement, en intégrant par parties,

$$2\int_m^n f(\tau)\cos 2\nu\pi\tau\,d\tau = 2\int_m^n f'(\tau)\frac{\sin 2\nu\pi\tau}{2\nu\pi}\,d\tau$$

$$= \frac{2}{(2\nu\pi)^2}\left[f'(n) - f'(m)\right] - 2\int_m^n f''(\tau)\frac{\cos 2\nu\pi\tau}{(2\nu\pi)^2}\,d\tau,$$

$$2\int_m^n f''(\tau)\frac{\cos 2\nu\pi\tau}{(2\nu\pi)^2}\,d\tau = 2\int_m^n f'''(\tau)\frac{\sin 2\nu\pi\tau}{(2\nu\pi)^3}\,d\tau$$

$$= \frac{2}{(2\nu\pi)^4}\left[f'''(n) - f'''(m)\right] + 2\int_m^n f^{4}(\tau)\frac{\cos 2\nu\pi\tau}{(2\nu\pi)^4}\,d\tau,$$

et ainsi de suite, et en tenant compte des égalités (15), on arrive donc finalement à la formule

$$\sum_m^n f(\nu) = \frac{1}{2}\left[f(m) + f(n)\right] + \int_m^n f(\tau)\,d\tau + \sum_{\nu=1}^{k}\left[(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu}\left[f^{(2\nu-1)}(n) - f^{(2\nu-1)}(m)\right]\right] + R_k, \tag{40}$$

où

$$R_k = (-1)^k 2 \int_m^n f^{(2k)}(\tau) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\pi\tau}{(2\nu\pi)^{2k}} d\tau . \tag{41}$$

(C'est la formule d'EULER avec l'expression du reste donnée par POISSON [1]).

En intégrant par parties et en tenant compte de la seconde équation (26), on peut mettre l'expression R_k sous la forme

$$R_k = \frac{1}{(2k+1)!} \int_m^n P_{2k+1}(\tau) f^{(2k+1)}(\tau) d\tau . \tag{42}$$

$P_{2k+1}(\tau)$ étant défini par les égalités (27); mais d'autre part la première équation (28) nous donne $P_{2k+1}(\tau) = \frac{1}{2k+2} P'_{2k+2}(\tau)$, de sorte que nous obtenons, en intégrant encore une fois par parties et en tenant compte des égalités (18) et (21),

$$R_k = \frac{1}{(2k+2)!} \int_m^n P_{2k+2}(\tau) f^{(2k+2)}(\tau) d\tau . \tag{43}$$

C'est, à la notation près, l'expression donnée par JACOBI [2]).

Citons encore la formule suivante qui constitue, pour ainsi dire, une première étape vers la formule d'EULER:

$$\sum_m^n f(\nu) = \frac{1}{2} \left[f(m) + f(n) \right] + \int_m^n f(\tau) d\tau + \int_m^n P_1(\tau) f'(\tau) d\tau . \tag{44}$$

En remarquant qu'on a, d'après la définition même, $P_1(\tau) = \tau - \nu - \frac{1}{2}$ pour $\nu < \tau < \nu + 1$, et d'autre part

$$\int_\nu^{\nu+1} \left(\tau - \nu - \frac{1}{2} \right) f'(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \left[f(\nu) + f(\nu+1) \right] - \int_\nu^{\nu+1} f(\tau) d\tau ,$$

on vérifie immédiatement que cette formule subsiste dès que la fonction $f(\tau)$ et sa dérivée première sont finies et continues dans l'intervalle de m à n.

D'une manière générale, on constate que l'algorithme des polynômes de BERNOULLI et les règles ordinaires de l'intégration par parties réduisent la formule d'EULER à une simple identité, lorsqu'on y prend le reste sous la forme (42) ou (43),

[1]) *Mémoire sur le calcul numérique des intégrales définies* (*Mémoires de l'Institut de France*, Année 1823, pp 571—602).

[2]) *De usu legitimo formulae Maclaurinianae* (*Journal de Crelle*, t. XII pp. 263—272, 1834).

à condition que $f(\tau)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $2k+2$ soient finies et continues dans l'intervalle de m à n.

Admettons que la fonction $f(\tau)$ et ses dérivées soient continues pour $\tau \geq m$, et supposons en outre que la somme $\sum_m^\infty f(\nu)$ et l'intégrale $\int_m^\infty f(\tau)\,d\tau$ aient des valeurs finies. Alors l'équation (44) nous donne, pour $n=\infty$,

$$\sum_m^\infty f(\nu) = \frac{1}{2} f(m) + \int_m^\infty f(\tau)\,d\tau + \int_m^\infty P_1(\tau) f'(\tau)\,d\tau. \tag{45}$$

Si l'on admet en outre que les dérivées $f'(\tau), f'''(\tau) \cdots, f^{(2k-1)}(\tau)$ tendent vers zéro lorsque τ tend vers l'infini, on obtient de même, en faisant tendre n vers l'infini dans la formule (40), et en se servant de l'expression (43) du reste R_k,

$$\sum_m^\infty f(\nu) = \frac{1}{2} f(m) + \int_m^\infty f(\tau)\,d\tau + \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \frac{B_\nu}{2\nu} \frac{f^{(2\nu-1)}(m)}{(2\nu-1)!} \tag{46}$$

$$\frac{1}{(2k+2)!} \int_m^\infty P_{2k+2}(\tau) f^{(2k+2)}(\tau)\,d\tau.$$

formule qui nous sera utile plus loin.

SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES SÉRIES DE TAYLOR.

11. Les formules générales établies dans la première partie de ce travail fournissent un moyen très commode pour l'étude des fonctions définies par les séries de la forme $\Sigma a_n x^n$, où a_n est une fonction analytique de l'indice n. N'ayant pas le temps de développer ce sujet intéressant dans toute sa généralité, nous nous placerons dès le début dans un cas bien déterminé, et d'ailleurs assez général, où nous allons retrouver, par une voie beaucoup plus directe, et sous une forme plus précise et souvent aussi plus générale, une grande partie des résultats établis par M. Le Roy dans son beau Mémoire, intitulé: *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor* [1]).

En écrivant la fonction donnée sous la forme

$$F(x) = \sum_0^\infty \varphi(n)\, x^n, \tag{47}$$

nous admettrons relativement à la fonction φ les hypothèses suivantes:

1° *$\varphi(z)$ est une fonction analytique de la variable complexe $z = \tau + it$, holomorphe pour tout point z tel que $\tau > 0$ (sauf peut-être à l'origine, où il suffit que $\varphi(z)$ prenne une valeur finie et déterminée)*;

2° *le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on le voudra, on peut trouver un autre nombre positif R tel qu'en posant $z = \rho e^{i\psi}$, on ait*

$$\varphi(z) < e^{\varepsilon\rho}$$

pour $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$, $\rho > R$ [2]).

Pour appliquer les formules dont il s'agit, on doit poser $f(z) = \varphi(z)\, x^z$ et déterminer les fonctions $p(\tau, t)$ et $q(\tau, t)$ à l'aide des équations (9). En écrivant

[1]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e Série, Tome II, 1900.

[2]) Il suit de cette hypothèse que le rayon de convergence de la série (47) est au moins égal à *un*.

$$\varphi(\tau + it) = p_1(\tau, t) + i q_1(\tau, t),$$

$$\varphi(\tau - it) = p_1(\tau, t) - i q_1(\tau, t),$$

on trouve

$$(48) \quad \begin{cases} p(\tau, t) = x^{\tau} \{p_1(\tau, t) \cos(t \log x) - q_1(\tau, t) \sin(t \log x)\}, \\ q(\tau, t) = x^{\tau} \{p_1(\tau, t) \sin(t \log x) + q_1(\tau, t) \cos(t \log x)\}. \end{cases}$$

Cela posé, on conclut immédiatement de l'hypothèse 2° que la condition (*A*) de la page 5, tant que x est réel et positif, est vérifiée uniformément pour $0 < \tau \leq n$, quelque grand que soit n.

D'autre part on aura, pour les mêmes valeurs de x,

$$\int_{\tau}^{+\infty} e^{-2\pi t} |f(\tau + it)| \, dt < 2 x^{\tau} \int_{0}^{\tau} e^{-2\pi t} \cdot e^{\varepsilon \sqrt{\tau^2 + t^2}} dt,$$

où l'on peut faire tendre ε vers zéro lorsque τ tend vers l'infini. Comme on a $\sqrt{\tau^2 + t^2} < \tau \sqrt{2}$ pour $0 < t < \tau$, et $\sqrt{\tau^2 + t^2} < t \sqrt{2}$ pour $t > \tau$, le second membre de l'inégalité précédente est inférieur à la somme

$$2 x^{\tau} e^{\varepsilon \tau \sqrt{2}} \int_{0}^{\tau} e^{-2\pi t} dt + 2 x^{\tau} \int_{\tau}^{t} e^{-2\pi t + \varepsilon t \sqrt{2}} dt,$$

dont les deux termes tendent vers zéro pour $\lim \tau = \infty$, si l'on impose à la variable x la condition $0 < x < 1$. Pour ces valeurs de x, la condition (*B*) de la page 6 est donc vérifiée, et par suite nous pouvons appliquer la formule (III)', qui nous donne

$$(49) \qquad F(x) = \sum_{0}^{\infty} \varphi(n) x^n - \frac{1}{2} \varphi(0) + H(x) + I(x),$$

avec

$$(50) \qquad H(x) = -2 \int_{0}^{\infty} \{p_1(0, t) \sin(t \log x) + q_1(0, t) \cos(t \log x)\} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1},$$

$$(51) \qquad I(x) = \int_{0}^{t} \varphi(\tau) x^{\tau} d\tau.$$

Pour arriver à la formule (49), nous avons supposé $0 < x < 1$. Mais comme les deux membres de cette formule sont des fonctions analytiques de x, elle subsistera dans tout domaine où ces fonctions sont holomorphes.

12. Étudions d'abord l'expression $H(x)$. En posant $x = r e^{i\theta}$, on trouve

$$\sin(t \log x) = \frac{1 + \varepsilon_1 e^{\theta t}}{2}, \quad \cos(t \log x) = \frac{1 + \varepsilon_2 e^{\theta t}}{2} \qquad (\theta < 0),$$

ε_1 et ε_2 tendant vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Comme les expressions $p_1(0, t)$ et $q_1(0, t)$, d'après l'hypothèse, croissent moins vite que $e^{\varepsilon t}$, quelque petit que soit ε, on en conclut immédiatement que l'intégrale (50) et sa dérivée par rapport à x sont des fonctions finies et continues pour $-2\pi < \theta < 2\pi$, $r > 0$, d'où ce résultat:

L'expression $H(x)$ définit une fonction analytique de la variable $x = re^{i\theta}$ qui est holomorphe pour tout point du domaine

$$-2\pi < \theta < 2\pi, \qquad r > 0. \tag{52}$$

Il s'ensuit encore, d'après l'égalité (49):

La différence $F(x) - I(x)$ est holomorphe pour tout point du domaine (52), *de sorte que la fonction $F(x)$ y admet précisément les mêmes singularités que l'expression $I(x)$.*

La fonction $H(x)$ peut se développer en série suivant les puissances entières et positives de la quantité $x - 1$, série qui sera convergente pour $|x - 1| < 1$, et dont les coefficients se déduiront facilement de l'intégrale (50). Le terme constant de cette série s'écrit par exemple

$$H(1) = -2\int_0^\infty q_1(0, t)\,\frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Mais pour le calcul effectif, il vaut mieux substituer dans l'expression $H(x)$

$$x = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^4, \quad \text{d'où} \quad \log x = 8\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \cdots\right).$$

On obtient ainsi un développement procédant suivant les puissances entières et positives de la quantité

$$u = \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} + 1},$$

et représentant $H(x)$ pour tout point du domaine (52)[1].

Faisons maintenant tendre x vers zéro avec un argument déterminé compris entre -2π et 2π. L'expression $I(x)$ tendra évidemment vers zéro, et par suite l'égalité (49) nous donne

[1] Cf. pp. 13—14 de notre Mémoire: *Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques*. Tome XXIV de la présente série de publications.

$$\lim_{x=0} H(x) = \frac{1}{2}\varphi(0). \tag{53}$$

D'autre part, *si l'on admet que l'intégrale* $\int_0^a q_1(0, t)\frac{dt}{t}$ *a un sens* (a étant un nombre positif quelconque), condition qui est toujours vérifiée lorsque $\varphi(z)$ est holomorphe à l'origine, on voit facilement que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} q_1(0, t)\cos(t\log x)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$$

s'évanouit lorsque x tend soit vers 0, soit vers ∞ avec un argument déterminé, de sorte qu'on aura dans les deux cas

$$\lim H(x) = \lim\left\{2\int_0^{\infty} p_1(0, t)\sin(t\log x)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\right\}.$$

Or, en remplaçant x par $\frac{1}{x}$, on trouve que la limite vers laquelle tend l'expression entre parenthèses, lorsque x tend vers zéro avec l'argument θ, est égale et de signe contraire à la limite vers laquelle tend cette même expression lorsque x tend vers l'infini avec l'argument $-\theta$. Comme la première de ces limites, d'après (53), est égale à $\frac{1}{2}\varphi(0)$, la seconde devient donc $-\frac{1}{2}\varphi(0)$, et par suite nous obtenons

$$\lim_{x=\infty} H(x) = -\frac{1}{2}\varphi(0). \tag{54}$$

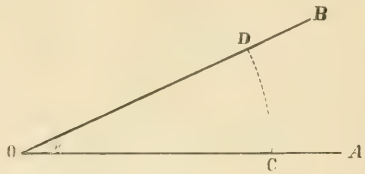
13. Passons maintenant à l'étude de l'expression (51), que nous écrirons, en changeant la notation de la variable d'intégration,

$$\int_0^{\infty} \varphi(z)\, x^z\, dz. \tag{55}$$

Tant qu'on effectue l'intégration suivant l'axe réel positif, cette expression n'a de sens qu'à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, où elle définit une fonction analytique $I(x)$, holomorphe partout, sauf à l'origine qui en est un point critique.

Mais il est facile d'étendre le domaine d'existence de cette fonction $I(x)$ en dehors du cercle de rayon *un*. Prenons en effet, dans l'expression (55), comme chemin d'intégration non pas l'axe réel positif OA, mais un rayon OB assez de

l'origine O et formant avec cet axe un angle ψ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, comme l'indique la figure ci-dessous. En posant comme plus haut $z = \rho e^{i\psi}$, $x = r e^{i\theta}$, on



aura sur le rayon OB

$$x^z = e^{\rho \log r \cos\psi - \theta \sin\psi}. \tag{56}$$

et comme $\varphi(z)$ croît moins vite que $e^{\varepsilon\rho}$, quelque petit que soit ε, on voit donc que l'intégrale (55), prise le long du rayon OB, représente une fonction analytique $I(x, \psi)$ qui est holomorphe pour tout point du domaine $T(\psi)$ défini par les inégalités

$$\log r \cos\psi - \theta \sin\psi < 0, \qquad r > 0. \tag{57}$$

Dans le cas présent, où l'angle ψ est supposé aigu, le domaine $T(\psi)$ comprendra les points intérieurs à la spirale logarithmique

$$r = e^{\theta \operatorname{tg} \psi}, \tag{58}$$

excepté l'origine.

La fonction $I(x, \psi)$ donne le prolongement analytique de $I(x)$ en dehors du cercle de rayon *un*. Pour le faire nettement voir, traçons un arc de cercle CD de centre O et de rayon R. L'expression $x^z \varphi(z)$ étant une fonction holomorphe de z dans le secteur OCD, l'intégrale $\int x^z \varphi(z)\, dz$, prise le long du contour de ce secteur, est égale à zéro. Mais d'après (56) on aura sur l'arc CD, en supposant x réel et compris dans l'intervalle $0 < x < 1$,

$$x^z < e^{-R \cos\psi \log\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Comme d'autre part $|\varphi(z)| < e^{\varepsilon R}$, l'intégrale relative à l'arc CD tendra donc vers zéro lorsque R augmente, et par suite, pour les valeurs considérées de x, l'intégrale (55) aura la même valeur, qu'on prenne l'axe réel ou le rayon OB comme chemin d'intégration. En d'autres termes, on aura $I(x) = I(x, \psi)$ pour $0 < x < 1$, ce qui prouve l'exactitude de notre assertion.

Lorsque ψ tend vers $\frac{\pi}{2}$, le domaine $T(\psi)$ tendra à embrasser tout point x dont l'argument θ est positif. Pour $\psi = \frac{\pi}{2}$, d'où $z = -it$, l'intégrale (55) devient

$$-\int_0^r e^{-\alpha t}\{p_1(0,t)\sin(t\log r) - q_1(0,t)\cos(t\log r)\}\,dt$$

$$+i\int_0^r e^{-\alpha t}\{p_1(0,t)\cos(t\log r) - q_1(0,t)\sin(t\log r)\}\,dt,$$

et cette expression représente la fonction $I(x)$ dans tout le domaine $\theta > 0$.

De même, pour $\psi = -\frac{\pi}{2}$, le domaine $T(\psi)$ embrassera tout point x tel que $\theta < 0$, et en ces points la fonction $I(x)$ sera représentée par l'expression

$$\int_0^r e^{\alpha t}\{p_1(0,t)\sin(t\log r) + q_1(0,t)\cos(t\log r)\}\,dt$$

$$+i\int_0^r e^{\alpha t}\{p_1(0,t)\cos(t\log r) - q_1(0,t)\sin(t\log r)\}\,dt.$$

Nous avons donc obtenu ce résultat:

En dehors de l'origine, la fonction $I(x)$ est partout régulière, sauf peut-être sur le segment $1 - \infty$ du rayon d'argument $\theta = 0$.

Les expressions ci-dessus montrent d'ailleurs que *la fonction $I(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini avec un argument positif ou négatif quelconque*, ou encore lorsque θ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, quel que soit r.

En rapprochant ces résultats de ceux du numéro précédent, nous arrivons au théorème important que voici:

Sous les conditions énoncées plus haut, la fonction $F(x)$, définie par la série (47), *est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être sur le segment $1 - \infty$ de l'axe réel; cette fonction tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini suivant un rayon quelconque dont l'argument θ est compris entre 0 et 2π.*

La première partie de ce théorème restera encore vraie, si les conditions citées sont vérifiées, non pas pour $\varphi(z)$, mais pour $\varphi(u_0 + z)$, u_0 étant un entier positif quelconque. C'est ce qu'on voit immédiatement en détachant de la série (47) les termes d'indice $u < u_0$, et en appliquant au reste de la série les mêmes raisonnements que ci-dessus.

14. Nous avons vu plus haut que, dans le domaine (52), la fonction $F(x)$ admet précisément les mêmes singularités que la fonction $I(x)$; mais ce n'est pas tout. En effet, nous allons voir que *si l'on sait étudier la fonction $I(x)$ pour toutes les valeurs x, il en sera de même de la fonction $F(x)$.*

La fonction $F(x)$ étant holomorphe dans le cercle de rayon *un* décrit de l'origine comme centre, l'égalité (49) nous montre d'abord qu'à l'intérieur de ce cercle la fonction $H(x)$, comme $I(x)$, n'aura d'autres points singuliers que l'origine.

Menons dans le plan de la variable x les coupures $1 \longrightarrow +\infty$ et $0 \longrightarrow -\infty$ suivant l'axe réel, et désignons par T le domaine ainsi formé. Nous appellerons, *branches principales* et désignerons par $F(x)$, $H(x)$, $I(x)$ les branches des fonctions $F(x)$, $H(x)$, $I(x)$ qui sont définies dans le domaine T par les expressions (49), (50), (51) ou leurs prolongements analytiques.

Ces branches, liées entre elles par la relation

$$F(x) = \frac{1}{2} q(0) + H(x) + I(x),$$

sont toutes holomorphes à l'intérieur du domaine T. D'ailleurs $H(x)$ est holomorphe pour tout point de la coupure $1 \longrightarrow +\infty$, et $F(x)$ pour tout point de la coupure $0 \longrightarrow -\infty$.

En partant d'un point x_0 situé sur l'axe réel entre l'origine et le point 1, traçons un contour C revenant au point x_0 après avoir franchi la coupure $0 \longrightarrow -\infty$, mais n'ayant aucun point commun avec l'autre coupure. Lorsque x décrit ce contour, $H(x)$ et $I(x)$ seront transformés en de nouvelles branches $H_1(x)$ et $I_1(x)$ des fonctions H et I, tandis que $F(x)$ ne changera pas. On en conclut la relation

$$H_1(x) + I_1(x) = H(x) + I(x). \tag{59}$$

Cela posé, faisons décrire à la variable x un contour C' issu du point x_0 et revenant à ce même point après avoir franchi la coupure $1 \longrightarrow +\infty$, et admettons que $I(x)$ peut se prolonger tout le long de ce contour C'. Les nouvelles branches $F_1(x)$ et $I_2(x)$ avec lesquelles on reviendra au point x_0, seront liées par la relation

$$F_1(x) = \frac{1}{2} q(0) + H(x) + I_2(x).$$

Supposons que $I_2(x)$ soit holomorphe en tout point du contour C envisagé plus haut, et désignons par $I_3(x)$ la branche avec laquelle on reviendra au point x_0, en cheminant le long de ce contour. En tenant compte de l'égalité (59), on voit alors que, la variable x décrivant le contour C, la branche $F_1(x)$ sera transformée en la suivante:

$$F_2(x) = \frac{1}{2} q(0) + H(x) + I(x) - I_1(x) + I_3(x).$$

En continuant de la sorte, on arrive à ce résultat que *toute branche de la fonction $F(x)$ peut se mettre sous la forme $F(x)$ + un nombre fini de termes dont chacun est un multiple entier, positif ou négatif, d'une branche de la fonction $I(x)$.* Donc, si l'on sait étudier toutes les branches de cette dernière fonction, on sait par là même étudier toutes les branches de la fonction donnée $F(x)$, ce que nous voulions démontrer.

15. On peut pousser plus loin l'étude de la fonction (47) dans les cas où sont vérifiées les hypothèses suivantes:

1° *la fonction $\varphi(z)$ est holomorphe dans le demi-plan à droite de l'axe imaginaire et sur cet axe (sauf peut-être à l'origine, où il suffit que $\varphi(z)$ prenne une valeur finie et déterminée)*;

2° *quelque grand que soit l'angle ψ_0, on peut trouver un nombre positif R tel que $\varphi(z)$ soit holomorphe pour $-\psi_0 < \psi < \psi_0$, $\rho > R$ (sauf peut-être à l'infini)*;

3° *quelque grand que soit ψ_0 et quelque petit que soit ε, on a*

$$\varphi(z) < e^{\varepsilon\rho} \quad \text{pour} \quad -\psi_0 < \psi < \psi_0,$$

dès que ρ dépassera une certaine limite.

Ces conditions portent sur *la branche principale* de $\varphi(z)$, qui a fourni les coefficients de la série (47).

Nous allons faire voir que, *sous les conditions énoncées ci-dessus, la fonction $I(x)$ n'a à distance finie d'autres points singuliers que l'origine et le point $(r=1, \theta=0)$.*

A cet effet, étudions d'abord les variations que subit le domaine $T(\psi)$, défini par les inégalités (57), lorsque l'angle ψ varie. Nous avons déjà dit que ce domaine, lorsque $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$, comprend les points *intérieurs* à la spirale logarithmique (58) (excepté l'origine), laquelle, pour $\psi = 0$, se confond avec le cercle de rayon *un* et, pour $\psi = \frac{\pi}{2}$, avec le rayon d'argument $\theta = 0$. Pour les valeurs ψ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, cos ψ étant négatif, $T(\psi)$ sera le domaine *extérieur* à la spirale (58), et en particulier, pour $\psi = \pi$, le domaine extérieur au cercle de rayon *un*; pour $\frac{3\pi}{2} < \psi < \frac{5\pi}{2}$, ce sera de nouveau le domaine *intérieur* à la spirale (58), laquelle, pour $\psi = 2\pi$, se confond avec le cercle de rayon *un*; et ainsi de suite. — Pour les valeurs négatives de ψ, on est conduit à des résultats analogues.

Cette discussion, qui devient plus claire à l'inspection d'une figure, conduit à la conclusion suivante:

Partant p. ex. d'un point situé sur le segment $0 - 1$ de l'axe réel, faisons décrire à la variable x, d'un mouvement uniforme, une courbe quelconque S, ne passant ni par l'origine ni par le point $(r = 1, \theta = 0)$, et aboutissant à un point quelconque x_1 distinct de ces deux points; *on pourra prescrire à l'angle ψ une variation continue telle que le point x, en décrivant la courbe S, soit à chaque instant intérieur au domaine $T(\psi)$*, lequel variera d'une manière continue lorsque le point x se déplace. Nous désignerons par ψ_0 la plus grande valeur numérique atteinte par l'angle ψ dans la variation considérée.

Ceci établi, déterminons le nombre R conformément à l'hypothèse 2°, et traçons un cercle C_R ayant l'origine comme centre et de rayon R. Nous allons considérer l'intégrale

$$\int_\Gamma r^z \varphi(z)\, dz \tag{60}$$

le contour d'intégration Γ se composant des parties suivantes:

1° le segment $0 - R$ de l'axe réel;

2° l'arc du cercle C_R compris entre les points $z = R$ et $z = Re^{i\psi}$;

3° la partie du rayon vecteur passant par le point $z = Re^{i\psi}$ qui s'étend de ce point à l'infini.

Pour $\psi = 0$, le contour Γ se réduit à l'axe réel positif, de sorte que l'intégrale (60) représentera la fonction $I(x)$, si l'on suppose x intérieur au cercle de rayon *un*. Pour une autre valeur quelconque ψ', comprise entre $-\psi_0$ et $+\psi_0$, l'intégrale (60), en vertu des hypothèses admises, définira une fonction analytique holomorphe dans le domaine $T(\psi')$, et en faisant varier ψ d'une manière continue de 0 à ψ', on conclut, par un raisonnement analogue à celui de la page 28, que cette fonction donne bien le prolongement analytique de $I(x)$.

En faisant décrire au point x la courbe S d'un mouvement uniforme, et en faisant en même temps varier l'angle ψ comme il a été dit ci-dessus, on voit dès lors que la fonction $I(x)$ peut se prolonger tout le long de cette courbe et qu'elle sera holomorphe au point x_1. Comme x_1 était un point quelconque distinct de l'origine et du point $(r = 1, \theta = 0)$, notre proposition est donc bien démontrée.

En rapprochant ces résultats de ceux des numéros précédents, nous arrivons au théorème que voici:

Sous les conditions énoncées p. 31, la fonction $F(x)$, définie par la série (47), ne peut admettre d'autres points singuliers que 0, 1 et ∞ (le point 0 étant en général point singulier pour toute branche de $F(x)$ autre que la branche principale).

Pour que ce théorème subsiste, il suffit d'ailleurs que les conditions dont il s'agit soient vérifiées pour la fonction $\varphi(n_0 + z)$, n_0 désignant un entier positif quelconque.

16. Soit comme plus haut $F(x)$ la branche principale de la fonction $F(x)$, c'est à dire la branche qui, à l'intérieur du cercle de rayon *un*, est représentée par l'expression

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(0) + H(x) + \int_0^\infty x^\tau \varphi(\tau)\, d\tau, \tag{61}$$

l'intégrale étant prise le long de l'axe réel positif. Traçons un contour fermé enveloppant le point $x = 1$, mais non l'origine; lorsque le point x décrit ce contour dans le sens *rétrograde*, $F(x)$ se changera en une nouvelle branche que nous désignerons par $F_1(x)$. Or il suit du raisonnement du numéro précédent que cette dernière branche, sous les conditions énoncées p. 31, est représentée à l'intérieur du cercle de rayon *un* par l'expression

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(0) + H(x) + \int_{\Gamma'} x^z \varphi(z)\, dz, \tag{62}$$

où le contour d'intégration Γ' se compose des parties suivantes:

1° le segment $0 \longrightarrow R$ de l'axe réel;

2° la circonférence C_R, parcourue dans le sens direct;

3° le segment $R \longrightarrow +\infty$ de l'axe réel.

Le rayon R du cercle C_R doit être pris assez grand pour que la branche principale de $\varphi(z)$ soit holomorphe pour $0 < \psi < 2\pi$, $\rho > R$ (sauf peut-être à l'infini).

Considérons quelques cas particuliers où l'on peut facilement calculer la différence $F_1(x) - F(x)$:

(α) *La branche principale de la fonction $\varphi(z)$ est uniforme à l'infini.* — Le nombre R étant déterminé comme il a été dit, la fonction $\varphi(z)$ sera alors uniforme en dehors du cercle C_R, et par suite les égalités (61) et (62) nous donnent

$$F_1(x) - F(x) = \int_{C_R} x^z \varphi(z)\, dz,$$

l'intégrale étant prise le long du cercle C_R dans le sens direct.

A l'extérieur de ce cercle et sur sa circonférence la fonction $\varphi(z)$ pourra être représentée par un développement de la forme

$$\varphi(z) = \sum_{1}^{\infty} A_n z^{-n},$$

et, en substituant cette expression dans l'égalité ci-dessus et en effectuant l'intégration terme à terme, on obtient

$$F_1(x) - F(x) = 2\pi i \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} (\log x)^{n-1}. \tag{63}$$

Le second membre étant une fonction entière de $\log x$, on peut à l'aide de cette égalité calculer la valeur d'une branche quelconque de la fonction $F(x)$ en un point donné du plan, si l'on connaît la valeur que prend en ce point la branche principale $\bar{F}(x)$.

(β) *La fonction $\varphi(z)$ est uniforme dans tout le plan et ne présente qu'un nombre fini de points singuliers.* — Les résultats précédents subsistent, mais on pourra remplacer l'égalité (63) par la suivante:

$$F_1(x) - F(x) = 2\pi i S, \tag{64}$$

S désignant la somme des résidus de la fonction $x^z \varphi(z)$ relatifs aux points singuliers de $\varphi(z)$ situés à distance finie.

Ce résultat s'applique par exemple lorsque $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle quelconque de z. Il serait intéressant d'étudier ce cas plus en détail et de faire voir comment varie la nature des singularités de $F(x)$ avec la position et l'ordre des pôles de $\varphi(z)$. Mais nous devons y renoncer pour le moment.

(γ) *La fonction $\varphi(z)$ est holomorphe dans tout le plan.* — Ce sera alors une fonction entière dont le module maximum sur le cercle $|z| = \rho$ croît moins vite que $e^{\varepsilon\rho}$, quelque petit que soit le nombre ε, propriété qui appartient, comme on sait, à toute fonction entière de genre 0 et à certaines fonctions de genre 1. Dans ce cas l'égalité (64) devient $F_1(x) \equiv F(x)$, et on en conclut que *la fonction $F(x)$ est uniforme dans tout le plan et admet $x = 1$ comme seul point singulier.* Le théorème de la page 29 montre d'ailleurs que $F(x)$ *s'annule à l'infini.*

On pourrait traiter par la même méthode le cas où $\varphi(z)$ est une fonction algébrique, ou plus généralement les cas où un nombre fini de branches de $\varphi(z)$ se permutent autour du point à l'infini; mais nous n'insisterons pas sur ces généralisations qui ne présentent aucune difficulté.

17. Appliquons la formule (49) aux cas les plus simples. En faisant d'abord $\varphi(z) = 1$, d'où $F(x) = \frac{1}{1-x}$, cette formule s'écrit

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log x} = 2\int_0^{\infty} \sin(t \log x) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1},$$

d'où l'on tire, en substituant $x = e^{y}$,

$$\frac{1}{e^y - 1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + 2\int_0^\infty \sin(yt)\frac{dt}{e^{2\pi t} - 1};$$

c'est la formule donnée par LEGENDRE. En tenant compte des égalités (15), on en déduit le développement bien connu

$$\frac{1}{e^y - 1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2}y - \frac{B_2 y^3}{4!} + \frac{B_3 y^5}{6!} - \cdots$$

Soit maintenant

$$F(x) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^s}.$$

Pour que les conditions énoncées p. 31 soient toutes vérifiées, nous devons supposer la partie réelle de s négative; la formule (49) nous donne alors

$$(65) \qquad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^s} = \Gamma(1-s)\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{s-1} - 2\int_0^\infty t^{-s}\sin\left(t\log x - \frac{\pi s}{2}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

En usant d'un artifice bien connu, on peut donner à cette égalité la forme

$$(65)' \qquad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^s} = \Gamma(1-s)\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{s-1} - \frac{2}{e^{2\pi s} - 1}\int_C t^{-s}\sin\left(t\log x - \frac{\pi s}{2}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

le contour d'intégration C se composant p. ex. des parties suivantes: 1° le segment $+\infty - k$ de l'axe réel $(0 < k < 1)$; 2° le cercle de centre 0 et de rayon k, parcouru dans le sens direct; 3° le segment $k - +\infty$ de l'axe réel. L'intégrale relative à ce contour étant une fonction entière de s, la formule (65)′ subsistera pour toutes les valeurs de s, sauf les valeurs entières.

On vérifie facilement sur la formule (65) les résultats généraux obtenus plus haut. Les seuls points singuliers sont 0, 1 et ∞. Lorsque x tend vers l'infini avec un argument déterminé, *toutes* les branches de la fonction tendent vers zéro, pourvu que la partie réelle de s soit négative.

En développant l'intégrale figurant au second membre de (65) suivant les puissances de $x - 1$, on trouve l'égalité

$$(66) \qquad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^s} = \Gamma(1-s)\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{s-1} = A_0 + A_1(x-1) + A_2(x-1)^2 + \cdots,$$

les coefficients du second membre s'exprimant sous forme d'intégrales définies. En particulier, il vient

$$A_0 = 2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\int_0^\infty \frac{t^{-s}\,dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Or, comme nous le verrons plus loin (p. 40), cette expression est égale à $\zeta(s)$, tant que la partie réelle de s est négative. On trouve ainsi:

$$A_0 = \zeta(s), \quad A_1 = \zeta(s-1), \quad A_2 = \frac{\zeta(s-2) - \zeta(s-1)}{2},$$

$$A_3 = \frac{\zeta(s-3) - 3\zeta(s-2) + 2\zeta(s-1)}{6}, \ldots$$

Le développement (66) converge pour $|x-1| < 1$. Il est d'ailleurs applicable pour toute valeur s qui n'est pas un entier positif, car, en développant dans la formule (65)′ le dernier terme suivant les puissances de $x-1$, on doit nécessairement retomber sur l'égalité (66).

Supposons la partie réelle de s inférieure à l'unité. L'égalité (66) nous donne d'abord

$$\lim_{x=1} (1-x)^{1-s} \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n^s} = \Gamma(1-s),$$

x tendant vers le point 1 *suivant un chemin quelconque* (toutefois tel que l'argument de x tende vers 0 et non vers un multiple de 2π), ce qui constitue déjà un résultat un peu plus précis que celui obtenu par M. LE ROY [1]). Mais l'égalité (66) nous permet évidemment d'écrire encore

$$\lim_{x=1} \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n^s} - \Gamma(1-s) \left[\log\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{s-1} \right\} = \zeta(s),$$

formule assez intéressante que nous n'avons pas rencontrée ailleurs.

Pour les valeurs s dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1, on peut écrire cette formule plus simplement

$$\zeta(s) = \lim_{x=1} \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n^s} - \Gamma(1-s)(1-x)^{s-1} \right\},$$

ou encore

$$\zeta(s) = -\Gamma(1-s) + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{\Gamma(n+1-s)}{\Gamma(n+1)} \right).$$

[1]) loc. cit. pp. 338–340.

LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN.

18. On sait que la fonction $\zeta(s)$, qui est représentée par la série

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$

tant que la partie réelle de s est supérieure à l'unité, est une fonction uniforme dans tout le plan, ayant pour seul point singulier à distance finie le point $s = 1$, où elle devient infinie comme le terme $\frac{1}{s-1}$. C'est ce qu'a établi RIEMANN en partant de la formule

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \tag{67}$$

qui est valable sous la même condition que la série donnée.

Ce caractère de la fonction $\zeta(s)$ est d'ailleurs une conséquence immédiate de la formule sommatoire d'EULER. En effet, en faisant dans l'égalité (46) $f(\tau) = \tau^{-s}$, $m = 1$, on obtient, en supposant la partie réelle de s supérieure à l'unité,

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \sum_{r=1}^{k} (-1)^r \frac{B_r}{2r} \frac{s(s+1)\cdots(s+2r-2)}{1\cdot 2\cdots(2r-1)} + R_k,$$

où

$$R_k = \frac{s(s+1)\cdots(s+2k+1)}{1\cdot 2\cdots(2k+2)} \int_1^\infty \frac{P_{2k+2}(\tau)}{\tau^{s+2k+2}} d\tau.$$

Or cette dernière expression est évidemment une fonction holomorphe de s tant que la partie réelle de cette variable est supérieure à $-(2k+1)$. Comme l'entier k peut être pris arbitrairement grand, et comme les autres termes du développement ci-dessus, à l'exception de $\frac{1}{s-1}$, sont des polynômes en s, on voit donc que la fonction $\zeta(s)$ a bien le caractère indiqué.

19. Conformément à la notation adoptée dans la première partie de ce travail, posons maintenant

$$f(z) = \Sigma \, f(\tau + it) \, (\tau + it)^{-s} = p(\tau, t) + iq(\tau, t),$$

d'où il suit:

$$p(\tau, t) = (\tau^2 + t^2)^{-\frac{s}{2}} \cos\left(s \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\tau}\right),$$

$$q(\tau, t) = (\tau^2 + t^2)^{-\frac{s}{2}} \sin\left(s \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\tau}\right).$$

La partie réelle de s étant toujours supposée supérieure à l'unité, on peut constater immédiatement que les formules du n° 4 sont applicables. La formule (I)' s'écrit [1]

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + 2\int_0^\infty (1+t^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arc\,tg} t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}; \tag{68}$$

ou si l'on veut, en posant $\operatorname{arc\,tg} t = x$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(s.x) (\cos x)^{s-2} \frac{dx}{e^{2\pi \operatorname{tg} x} - 1}. \tag{68'}$$

De même, la formule (II)' nous donne, pour $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{s-1} + 2\int_0^\infty \left(\frac{1}{4} + t^2\right)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arc\,tg} 2t) \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1}, \tag{69}$$

ou bien, en posant $\operatorname{arc\,tg} 2t = x$,

$$\zeta(s) = 2^{s-1}\left\{\frac{1}{s-1} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(s.x) (\cos x)^{s-2} \frac{dx}{e^{\pi \operatorname{tg} x} + 1}\right\}. \tag{69'}$$

L'une quelconque de ces expressions définit la fonction $\zeta(s)$ dans tout le plan et en met en évidence certaines propriétés intéressantes. Ainsi la formule (68) nous donne $\zeta(0) = \frac{1}{2}$, et

$$\zeta'(0) = 2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg} t \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}, \tag{70}$$

$$\left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right]_{s=1} = \frac{1}{2} + 2\int_0^\infty \frac{t}{1+t^2} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}. \tag{71}$$

[1] Cette formule a été indiquée par M. PETERSEN, mais sous une forme moins simple.

Les valeurs des intégrales qui figurent dans ces expressions se déduisent immédiatement de nos formules générales. En effet, la formule (I) nous donne, pour $f(z) = \log z$,

$$\log(1 \cdot 2 \cdots n) = 1 - 2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg} t \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + 2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{n} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

La comparaison de ce résultat avec l'égalité

$$\log(1 \cdot 2 \cdots n) = \log\sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \varepsilon(n) \qquad \left(\lim_{n=\infty} \varepsilon(n) = 0\right)$$

montre que *l'expression* (70) *est égale à* $-\log\sqrt{2\pi}$.

D'autre part, la formule (I a)' s'écrit, pour $f(z) = \frac{1}{z}$,

$$\lim_{m=\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \log\left(m + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2} + 2\int_0^\infty \frac{t}{1+t^2} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Donc *l'expression* (71) *est égale à la constante d'*Euler. Cette expression de la constante d'Euler a été donnée par Poisson [1]).

De la formule (69) nous pouvons conclure que $\zeta(s)$ n'a pas de zéro réel compris entre l'origine et le point $s = 1$, puisque dans cet intervalle les termes du second membre sont tous les deux négatifs.

20. Reprenons pour un moment la formule (2), qui a été le point de départ de nos recherches, et choisissons comme contour d'intégration un rectangle $R_{0,\beta}$ $(n < \beta < n+1)$, dont on aura remplacé un segment, comprenant l'origine, par un demi-cercle c de rayon ε, ayant l'origine pour centre et tournant sa convexité vers la droite. Lorsqu'on fait tendre vers l'infini le nombre β et la hauteur du rectangle, ε gardant au contraire une valeur fixe, on se trouve amené, par le même raisonnement qu'aux nos 1—3, et en supposant vérifiées les conditions requises, à la formule suivante:

$$\sum_1^\infty f(\nu) = -2\int_\varepsilon^\infty q(0,t) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} + \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \left|f(\tau + i\varepsilon) + f(\tau - i\varepsilon)\right| d\tau + \frac{1}{2i}\int_c f(z) \operatorname{cotg} \pi z \, dz,$$

la dernière intégrale étant prise le long du demi-cercle c, du point $i\varepsilon$ au point $-i\varepsilon$.

Dans le cas actuel, où $f(z) = z^{-s}$, cette formule est applicable dès que la partie réelle de s est supérieure à l'unité, et nous donne

---

[1]) *Mémoires de l'Institut de France*, Année 1811 II, p. 223.

$$\zeta(s) = 2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\int_0^\infty \frac{t^{-s}\,dt}{e^{2\pi t}-1} + \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\frac{\varepsilon^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2i}\int_C \varepsilon^{-s}\cot g\,\pi z\,dz\,.$$

Or on voit de suite que, pour une valeur donnée de ε, cette égalité subsiste dans tout le plan, malgré la restriction qu'on a dû imposer à la variable s pour y arriver. On peut donc, en particulier, donner à s une valeur dont la partie réelle est négative, et en faisant tendre ε vers zéro, on obtient alors

$$\zeta(s) = 2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\int_0^\infty \frac{t^{-s}\,dt}{e^{2\pi t}-1}\,, \tag{72}$$

formule qui est valable dans tout le demi-plan situé à gauche de l'axe imaginaire.

L'expression (72) met en évidence que la fonction $\zeta(s)$ s'annule aux points $s = -2, -4, -6, \cdots$ Pour $s = -(2n-1)$, elle nous donne

$$\zeta(-(2n-1)) = (-1)^n\, 2\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1} = (-1)^n\,\frac{B_n}{2n}\,.$$

En faisant, dans le second membre de (72), $2\pi t = x$, nous trouvons

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\int_0^\infty \frac{x^{-s}}{e^x-1}\,dx\,,$$

et par suite, par comparaison avec l'égalité (67),

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s)\,, \tag{73}$$

d'où suit la formule asymptotique

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\,(1+\varepsilon(s)) \qquad \left(\lim_{s=\infty}\varepsilon(s) = 0\right), \tag{74}$$

qui a lieu sur tout rayon issu de l'origine et dont l'argument est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Or la théorie de la fonction Γ fournit la relation

$$\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s) = 2^{-s}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,,$$

et, en posant

$$\chi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\,, \tag{75}$$

nous pouvons donc écrire l'égalité (73) sous la forme

$$\chi(s) = \chi(1-s). \tag{76}$$

C'est le théorème fondamental établi par RIEMANN.

La théorie générale des fonctions entières, créée par M. HADAMARD, permet de conclure de la formule asymptotique (74) que la fonction $\zeta(s)$ admet une infinité de zéros $a_1, a_2, \cdots$, distincts des zéros $-2, -4, \cdots$, dont l'existence est révélée par l'expression (72). Or on sait, d'après l'expression qu'en a donnée EULER sous forme d'un produit infini, que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pour aucune valeur s dont la partie réelle est supérieure à l'unité. Il en est donc de même de la fonction $\chi(s)$, et par suite on peut conclure de l'égalité (76) que les zéros a sont tous situés à l'intérieur ou sur la frontière de la bande comprise entre l'axe imaginaire et la parallèle à cet axe passant par le point $s = 1$.

L'égalité (76) nous montre, d'autre part, que la fonction $\chi(s)$ prend des valeurs réelles sur la droite D parallèle à l'axe imaginaire et passant par le point $s = \frac{1}{2}$. Si les zéros a n'étaient pas situés sur D, ils seraient donc deux à deux symétriques par rapport à cette droite. Or la fonction $\zeta(s)$, d'après les propriétés qu'on en connaît, ne présente aucune espèce de symétrie par rapport à la droite en question. Il est donc plus que probable que les zéros a sont tous situés sur la droite D, bien qu'on n'ait pas encore réussi à le démontrer rigoureusement.

21. Appliquons encore à la fonction $\zeta(s)$ la formule (I)'' du n° 4; elle nous donne

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1}$$

$$+ 2n \int_0^\infty \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{-\frac{s}{2}} \sin\left(s \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{n}\right) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1},$$

égalité valable pour toute valeur de s. En développant la dernière intégrale suivant les puissances négatives de n, à l'aide de l'équation (32), on est conduit à la formule suivante:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} + \frac{B_1}{2}\frac{s}{n^{s+1}} \tag{77}$$

$$+ \frac{B_2}{4}\frac{s(s+1)(s+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^{s+3}} + \cdots + (-1)^k \frac{B_k}{2k}\frac{s(s+1)\cdots(s+2k-2)}{1\cdot 2\cdots(2k-1)}\frac{1}{n^{s+2k-1}} + R,$$

le reste R_k étant assujetti à l'inégalité (34).

Cette même formule s'obtient encore de l'égalité (46), en remplaçant m par n, et en ajoutant aux deux membres la somme $\sum_1^{n-1} f(\nu)$, et par cette voie on trouve pour le reste R_k l'expression exacte que voici:

$$R_k = \frac{s(s+1)\cdots(s+2k+1)}{1\cdot 2\cdots(2k+2)} \int_n^\infty \frac{P_{2k+2}(\tau)}{\tau^{s+2k+2}}\, d\tau. \tag{78}$$

La formule (77) est intéressante sous plusieurs rapports. Elle nous donne d'abord, comme première approximation,

$$\zeta(s) = \lim_{n=\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} \right\},$$

égalité qui s'applique dès que la partie réelle de s est supérieure à -1. Puis, en égalant s à un entier négatif, on en tire les expressions des polynômes de BERNOULLI. En différentiant et faisant $s=0$, on obtient la formule de STIRLING pour $\log(1\cdot 2\cdots n)$. Enfin, en retranchant des deux membres le terme $\frac{1}{s-1}$, puis en faisant tendre s vers l'unité, on en conclut le développement connu de la constante eulérienne.

Mais l'importance de la formule (77) consiste surtout en ceci, qu'elle fournit le seul moyen vraiment pratique pour le calcul numérique des valeurs de la fonction $\zeta(s)$. Pour mieux nous en rendre compte, nous allons chercher une limite supérieure du module du reste R_k.

Pour les valeurs réelles de s, on conclut immédiatement de l'inégalité (34)

$$R_k < T_{k+1},$$

en posant pour abréger

$$T_\nu = (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu} \frac{s(s+1)\cdots(s+2\nu-2)}{1\cdot 2\cdots(2\nu-1)} \frac{1}{n^{s+2\nu-1}}.$$

Comme $\overline{P}_{2k+2}(\tau)$ a le signe de $(-1)^{k+1}$, on voit d'ailleurs que R_k aura le même signe que T_{k+1}, si $s > -(2k+1)$.

Donnons maintenant à la variable s une valeur complexe [1]):

$$s = x + iy.$$

L'intégrale qui figure dans l'expression (78) s'écrira

[1]) Il va sans dire qu'on calculera dans ce cas les termes T_ν en formant le produit des modules et la somme des arguments des divers facteurs qu'ils contiennent.

$$\int_n^t P_{2k+2}(\tau)\left[\cos(y\log\tau) - i\sin(y\log\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau^{x+2k+2}},$$

et le module de cette quantité est inférieur à

$$\int_n^t \frac{P_{2k+2}(\tau)}{\tau^{x+2k+2}}\,d\tau,$$

limite qui sera d'ailleurs d'autant plus grossière que la valeur numérique de y est plus grande.

D'après n° 6 on a

$$\int_{\nu}^{\nu+\frac{1}{2}} P_{2k+2}(\tau)\,d\tau = \int_{\nu+\frac{1}{2}}^{\nu+1} P_{2k+2}(\tau)\,d\tau = \frac{B_{k+1}}{2},$$

quel que soit l'entier ν, et en appliquant à l'intégrale précédente le premier théorème de la moyenne, on obtient donc

$$\int_n^t \frac{P_{2k+2}(\tau)}{\tau^{x+2k+2}}\,d\tau = \frac{B_{k+1}}{2}\left[\frac{1}{\tau_1^{x+2k+2}} + \frac{1}{\tau_2^{x+2k+2}} + \cdots\right],$$

les nombres $\tau_1, \tau_2, \cdots$ étant respectivement compris dans les intervalles $\left(n, n+\frac{1}{2}\right)$, $\left(n+\frac{1}{2}, n+1\right), \cdots$

Il est facile de voir que la somme de la série entre crochets est sensiblement égale à $2\int_n^\infty \frac{d\tau}{\tau^{x+2k+2}}$. En toute rigueur, on peut conclure qu'elle est inférieure à l'expression

$$2\int_n^t \frac{d\tau}{\tau^{x+2k+2}} + \frac{1}{n^{x+2k+2}} = \frac{2}{n^{x+2k+1}}\left(\frac{1}{x+2k+1} + \frac{1}{2n}\right).$$

En somme, nous trouvons donc, lorsque $s = x + iy$, pour le module du reste R_k la limite supérieure suivante:

(79) $$|R_k| < |s+2k+1|\left(\frac{1}{x+2k+1} + \frac{1}{2n}\right) T_{k+1}.$$

On obtiendra souvent une limite plus approchée en se servant de l'inégalité évidente

(79)' $$|R_k| < T_{k+1} + T_{k+2} + \cdots + T_{k+\nu} + R_{k+\nu},$$

où l'on choisira convenablement l'entier ν, et où l'on remplacera le dernier terme par la limite supérieure qu'en fournit l'inégalité (79).

22. On conçoit dès lors que la formule (77) fournit un moyen très commode pour le calcul des zéros de la fonction $\zeta(s)$ situés sur la droite D. Comme ces zéros sont deux à deux symétriques par rapport à l'axe réel, il suffira de chercher ceux dont les ordonnées sont positives.

Voici l'idée très simple qui nous a guidé. D'après ce que nous avons dit plus haut, la fonction $\chi(s)$, définie par l'expression (75), prend des valeurs réelles sur la droite D. Il s'ensuit que, pour un point quelconque s de cette droite, le reste suivant le module 2π de la quantité

$$\Omega = \arg \pi^{-\frac{s}{2}} + \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \arg \zeta(s) \tag{80}$$

est égal à 0 ou à π, suivant que $\chi(s)$ est positif ou négatif. Comme $\chi(s)$ ne change évidemment de signe qu'en s'annulant, et comme cette fonction, d'autre part, présente sur la droite en question précisément les mêmes zéros que $\zeta(s)$, on voit dès lors que, *pour séparer les zéros de la fonction $\zeta(s)$ compris sur un segment donné de la droite D, on n'aura qu'à calculer, avec une erreur moindre que $\frac{\pi}{2}$, la valeur de la quantité Ω pour une suite de points suffisamment rapprochés de ce segment.*

Notre raisonnement suppose que les zéros qu'on cherche sont tous simples, ce qu'on peut présumer, et ce que le calcul permettra de vérifier *a posteriori*.

L'évaluation de la quantité Ω ne présente aucune difficulté. En posant $s = \frac{1}{2} + iy$ (y réel), on aura d'abord

$$\arg \pi^{-\frac{s}{2}} = -\frac{y}{2} \log \pi .$$

Pour le calcul du second terme de (80), on fera usage du développement connu de $\log \Gamma(z)$, en se bornant aux termes

$$\log \Gamma(z) = \log \sqrt{2\pi} - z + \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z + \frac{B_1}{2z},$$

qui donnent une approximation plus que suffisante. Il s'ensuit

$$\arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = y\left(\frac{1}{4} \log (1 + 4y^2) - \frac{1}{2} - \log 2\right) - \frac{2}{3} \frac{y}{1 + 4y^2} - \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} 2y .$$

L'erreur commise est, d'après STIELTJES [1]), numériquement inférieure à

[1]) *Sur le développement de $\log \Gamma(a)$* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série T. V, 1889).

$$\frac{8}{3}\frac{B_2}{|s|^3} = \frac{0.089}{\left(y^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On peut même démontrer qu'elle est inférieure à

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{B_2}{|s|^3} = \frac{0.043}{\left(y^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On calculera enfin, à l'aide de la formule (77), la valeur de la fonction

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right) = \xi(y) + i\,\eta(y);$$

l'argument de cette quantité donnera le dernier terme de la somme (80), et les inégalités du numéro précédent permettront d'évaluer une limite supérieure de l'erreur commise.

Pour illustrer la méthode que nous venons d'esquisser, nous publierons ici les résultats numériques fournis par un calcul que nous avions entrepris au commencement de l'année, mais auquel, occupé d'autres recherches, nous n'avons pu consacrer en somme que quelques jours.

Dans le tableau qui suit, y, $\xi(y)$, $\eta(y)$ ont la même signification que ci-dessus, et ω désigne le reste suivant le module 2π (converti en degrés) de la valeur approchée qu'a fournie notre calcul pour la quantité Ω.

y	$\xi(y)$	$\eta(y)$	ω	y	$\xi(y)$	$\eta(y)$	ω
12	1.016	— 0.744	180° 1′	32	0.86	— 0.20	180°.2
13	0.444	— 0.656	180° 3′	34	0.52	1.62	0°.2
14	0.021	— 0.104	179° 19′	36	2.35	— 1.19	— 0°.4
14.25	— 0.012	0.092	0° 47′	38	0.47	0.56	177°.8
15	0.148	0.706	— 0° 1′	40	0.83	— 1.03	181°.8
18	2.331	— 0.187	0° 2′	42	1.02	0.42	2°.8
20	0.427	— 1.062	— 0° 7′	44	— 0.05	1.37	182°.3
22	0.718	0.665	179° 53′	46	3.29	— 1.46	179°.2
24	0.958	— 0.585	180° 0′	47	0.24	— 1.95	177°.6
26	0.504	1.344	— 0° 2′	48	0.07	0.05	(— 5°.8)
28	2.713	— 0.679	— 0° 2′	49	0.65	— 0.31	— 8°.5
30	— 0.124	— 0.598	— 0° 3′	50	— 0.16	0.42	186°.8

Pour le calcul de $\xi(y)$ et de $\eta(y)$, nous nous sommes servi de la formule (77), en faisant $n=10$, $k=1$, et en négligeant le reste. Il s'ensuit, d'après (79), pour les valeurs numériques des erreurs commises, une limite supérieure d'environ 0.8, lorsque $y \leqq 50$. Mais l'inégalité (79)', en y faisant $k=1, \nu=5$, permet de réduire ce chiffre à 0.18. Lorsque $y \leqq 15$, on conclut de (79) pour les erreurs en question une limite supérieure plus petite que 0.01.

Quelque peu approchées que soient ces limites, elles suffisent cependant pour prouver, comme on s'en aperçoit au premier coup d'oeil, que la valeur exacte de la quantité désignée par ω, pour l'un quelconque des arguments y indiqués dans le tableau, est bien égale à celle des quantités 0° et 180° qui s'écarte le moins de la valeur calculée de ω. Il y a toutefois exception pour $y=48$, les valeurs correspondantes de ξ et de η étant numériquement inférieures à l'erreur à craindre.

Des chiffres qui précèdent, nous pouvons donc tirer ce résultat [1]) que *le segment de la droite D qui correspond à l'intervalle* 12 — 50 *de l'ordonnée* y [2]), *renferme certainement dix zéros de la fonction* $\zeta(s)$, les ordonnées de ces zéros étant respectivement comprises entre les limites

$$14 - 14.25, \quad 20 - 22, \quad 24 - 26, \quad 30 - 32, \quad 32 - 34,$$
$$36 - 38, \quad 40 - 42, \quad 42 - 44, \quad 47 - 49, \quad 49 - 50.$$

Il semble probable que ce soient là tous les zéros situés sur le segment en question, bien que le résultat de notre calcul ne nous permette pas de l'affirmer.

Les zéros une fois séparés, on pourra les calculer avec telle approximation qu'on désire, en prenant dans la formule (77) l'entier n suffisamment grand, et en choisissant convenablement l'entier k [3]).

---

[1]) Nous avions aussitôt communiqué ce résultat à quelques mathématiciens, entre autres à M. MITTAG-LEFFLER, dans une lettre datée du 22 janvier 1902.

[2]) On sait que M. v. MANGOLDT a démontré qu'il n'existe pas de zéros d'ordonnée inférieure à 12.

[3]) Au moment où nous allions reprendre notre calcul pour en préciser les résultats, nous avons eu connaissance d'un travail de M. J.-P. GRAM, intitulé: *Note sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de* RIEMANN (travail présenté à l'Académie des Sciences de Copenhague le 7 février 1902). L'auteur y communique les valeurs à 6 décimales exactes qu'il a trouvées, en se servant également de la formule (77), pour les ordonnées des dix zéros de $\zeta(s)$ dont nous avons démontré ci-dessus l'existence, et donne en outre les ordonnées des cinq zéros suivants avec 1 décimale.

40

LINDELOF

QUELQUES APPLICATIONS D'UNE FORMULE ...

UNIVERSITY OF TORONTO
DEPT. OF MATHEMATICS
LIBRARY